SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

2

GODINA IX.
ZAGREB
1958 — 59

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 240. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uputnicom

SADRŽAJ

	Strana
Labović Nadežda, Polarna svjetlost	49
Prvanović Stanko, Neke osobine prirodnih brojeva	54
Напијало Милан, Феромагнетизам	57
Smolec Ignacije, Iz teorije skupova	64
Prelec ing. Krsto, Brojila električnih pulseva	69
Sevdić Milenko, O jednoj univerzalnoj formuli za volumene tijela	73
Horvatić Krešo, Konveksne figure	77
Iz moje radionice i laboratorija: Školski otpornik (E. V.)	80
Zanimljivosti i razno: Mihajlo Pupin — Награђени ученици у такмичењу из физике у НРМ — Zbroj kvadrata m prirodnih uzastopnih brojeva predočen kao zbroj kvadrata m—1 takvih brojeva	81
Nove knjige: D. S. Mitrinović, Metod matematičke indukcije	84
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike — B. Zadaci iz fizike — C. Rješenja iz matematike — D. Rješenja iz fizike	84
Vježbe za učenike gimnazija i srednjih stručnih škola	93
Prof. dr. Radovan Vernić	96
Математичка укрштеница	3 str. omota
Решење укрштенице из 1 броја	4 str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ dr. BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA IX. BROJ 2 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1958. — 1959.

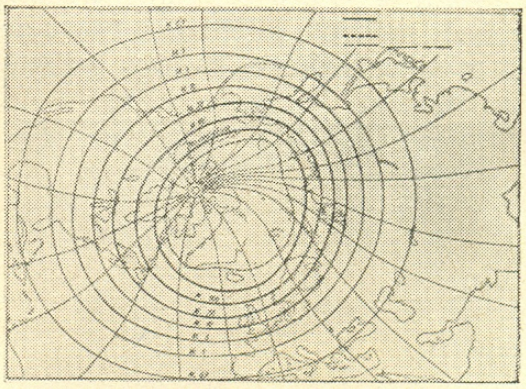
Polarna svjetlost

NADEŽDA LABOVIĆ, Zagreb

Polarna je svjetlost jedna od najprivlačnijih prirodnih pojava. Njena čudesna ljepota i tajanstveno kretanje oduvijek su uzbuđivali čovjekovu maštu i oplemenjivali njegov estetski osjet. Vidjeti polarnu svjetlost — nezaboravan je doživljaj, koji će teško opisati i pero najvještijeg pisca...

Geografska raspodjela

U krajevima oko sjevernog i južnog pola polarna je svjetlost vrlo česta pojava, dok se u zemljama tropskog pojasa gotovo uopće ne javlja. Na sjevernoj hemisferi zovu je »aurora borealis«, a na južnoj »aurora australis«, tako da je općenito možemo zvati i »aurora polaris«. Postoji mnogo kataloga o pojavama aurore u raznim zemljama. Do danas je svakako najinteresantniji katalog prof. Hermana Fritza na Politehničkom institutu u Zürichu, izdan 1873. godine. U ovom je katalogu H. Fritz sakupio podatke o pojavama aurore borealis od 503. godine prije nove ere do 1872. godine — te je na osnovu njega izradio svoju glasovitu kartu »izokazma«,* koja još i danas služi kao podloga za proučavanje geografske raspodjele nastupa polarne svjetlosti (sl. 1.). Izokazme su linije, koje spajaju mjesta iste procentualne vjerojatnosti nastupa aurore borealis (sličnu kartu za auroru australis izradili su nedavno dr. Vestine i Snyder), razumljivo — vedrim noćima, kada se aurore mogu vidjeti. Ove linije zaokružuju magnetske polove Zemlje (magnetski polovi Zemlje ne podudaraju se s geografskim polovima, zbog čega dolazi do magnetske deklinacije), odakle se vidi, da čestina nastupa aurore ovisi više o geomagnetskoj nego o geografskoj dužini. Na obje hemisfere postoje linije maksimalne čestine polarne svjetlosti, koje označavaju »zone polarne svjetlosti«, gdje je ova pojava vidljiva gotovo svake vedre noći. Od izokazme maksimalne čestine, koja prolazi južno od Greenland-a kroz najsjevernije predjele Azije i N. Amerike, opada čestina nastupa aurore i prema sjeveru i prema jugu. Zadnja izokazma prolazi Mexicom, južnom Italijom te tangira Kinu. Ovdje se aurore vide približno jedamput u 10 godina, što odgovara i



Sl. 1. Karta izokazma za sjevernu hemisferu

——— zona polarne svjetlosti

– – – – linija koja označava područje, gdje se polarna svjetlost vidi u jednakom broju na sjevernom kao i na južnom dijelu neba

. . . . . magnetski meridijani

* Riječ „izokazma“ potiče od „chasmata“, što označuje auroru u Aristotelovom djelu „Meteorologica“.

nastupima polarne svjetlosti u našim krajevima (jedamput u 8 do 10 godina). — U nižim geografskim širinama pogodnost da se vide aurore raste s nadmorskom visinom. Ujedno je ovdje vjerojatnost njenog nastupa veća u mjestima, koja su bliže onom meridijanu, što prolazi kroz magnetski pol Zemlje (69° W na sjev. hemisferi, odnosno 111° E na južnoj hemisferi). Zato na pr. Havana i Cuba mogu očekivati više pojava aurore od Hong Kong-a, a Lima više nego Batavia (Djakarta) na Javi.

Kako su polarne svjetlosti u niskim geografskim širinama vanredno rijetke, spomenut ćemo ovdje nekoliko takvih značajnih pojava aurore »tropicalis«.

1. rujna 1859. — aurora se vidjela čak u Honolulu (Hawai).

4. veljače 1872. — aurora se vidjela u Bombay-u i 7 drugih mjesta u Indiji, u Guatemali, a na južnoj hemisferi na Mauritius otočju.

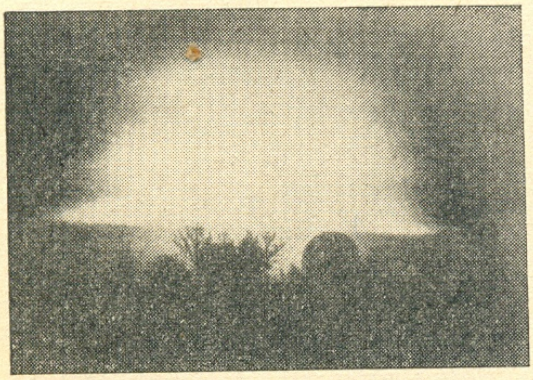
25. rujna 1909. aurora se vidjela u Singapoor-u, Batavii te Cocos otočju (12° S, 97° E).

Navodimo i datume, kada je aurora borealis bila opažena i zabilježena u našim krajevima:

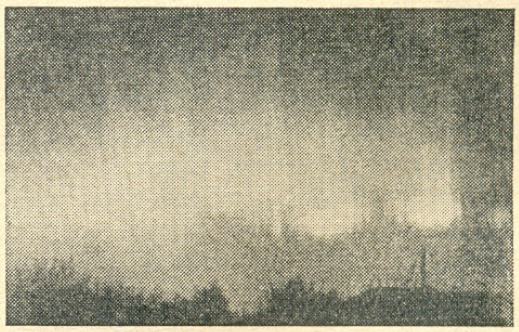
1. 18. I. 1770.
2. 25. X. 1870.
3. 17. XI. 1882.
4. 15. V. 1921.
5. 25. I. 1938.
6. 24. III. 1940.
7. 3. III. 1941.
8. 17. V. 1947.
9. 26. I. 1949.
10. 28. X. 1951.
11. 21. I. 1957.
12. 29. IX. 1957.
13. 10. II. 1958.

Oblici, spektar i visina

Aurora polaris pokazuje veliku raznolikost po prostornoj veličini, intenzitetu svjetlosti te po obliku i duljini trajanja. Od svega nekoliko minuta može se njeno trajanje produljiti satima pa i čitavu noć, a prostor, koji zauzima, može imati širinu od nekoliko stupnjeva na sjev. horizontu pa sve do i preko točke zenita.



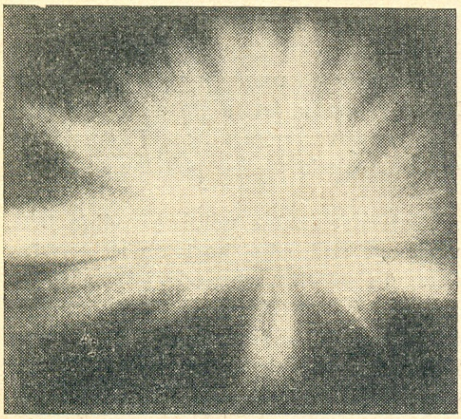
Sl. 2. Mirni, homogeni luk



Sl. 3. Pulzirajući luk sa zrakastom strukturom

Mnoge fotografije polarne svjetlosti, u prvom redu aurore borealis, koje je izradio prof. C. Störmer, poslužile su kao podloga za izradu internacionalnog atlasa aurore polaris. Postoje dva tipa polarne svjetlosti prema tome da li ona pokazuje (1) ili ne pokazuje (2) zrakastu strukturu. U grupu (1) spadaju: homogeni (mirni ili pulzirajući) luk iznad sjevernog horizonta (sl. 2.), obično s oštrom donjom, a difuznom gornjom granicom. Često se javi nekoliko lukova. Tu spadaju i svijetleće difuzne površine. Oblici druge grupe su interesantniji te mogu svojom fascinirajućom ljepotom izazvati strah kod neupućenih motrilaca. Često je miran homogeni luk presi-

jecan snopovima zraka, koje se poput lepeze šire sa sjevernog horizonta (sl. 3.). Kada ovakve zrake s više strana konvergiraju prema zenitu, može doći do formiranja jednog od najljepših oblika polarne svjetlosti (sl. 4.) — blistave »corone« (krune). Svijetle, jako pokretne, nepravilne pruge zrakaste strukture, koje mogu biti i višestruke, obično liče na draperije (sl. 5.). Često se najsvjetlije mjesto na ovakvim



Sl. 4. „Corona"

Sl. 5. Polarna svjetlost oblika draperije

»draperijama« brzo pomiče po njihovoj dužini, što daje utisak, kao da im vjetar pokreće nabore. Utvrđeno je, da se zrake aurore uglavnom pružaju smjerom silnica geomagnetskog polja, dok su lukovi i draperije više ili manje okomiti na magnetski meridijan.

Pojave polarne svjetlosti u našim krajevima najčešće imaju oblik homogenog luka na sjevernom horizontu, koji se svojim žarko crvenim sjajem može neupućenim promatračima učiniti kao odraz nekog ogromnog požara, a crvenim refleksom na površini mora zna izazvati strah kod neukog stanovništva. Ponekad je ovaj luk presijecan svijetlim zrakama, kao što je bio slučaj 1938. i 1957. godine.

Aurora se obično javlja u crvenoj boji sa svijetlo žutim ili sjajno zelenim odsjevima. Proučavanje njenog spektra pokazalo je, da boje aurore u velikoj mjeri ovise o zelenoj liniji atomnog kisika (0,5577 mikrona — 1 mikron je hiljaditi dio milimetra) te duploj crvenoj liniji kisika (0,6363 i 0,6300 mikrona). Također su pronađene mnoge linije dušika, ali osim crvene dušikove linije (0,6500 mikrona) sve su one mnogo slabije od kisikovih spektralnih linija.

Mjerenja visine polarne svjetlosti pokazala su, da ona i u tom pogledu jako varira, javljajući se između 80 i 300 km, od čega pretežno nešto iznad 100 km; međutim zabilježeni su i slučajevi pojave aurore na visinama između 800 i 1000 km. Budući da na tim visinama imamo još vrlo malo meteoroloških podataka, spektroskopska istraživanja polarne svjetlosti mnogo pomažu rasvjetljavanju problema sastava i stanja jako razrijeđenih najviših slojeva Zemljine atmosfere.

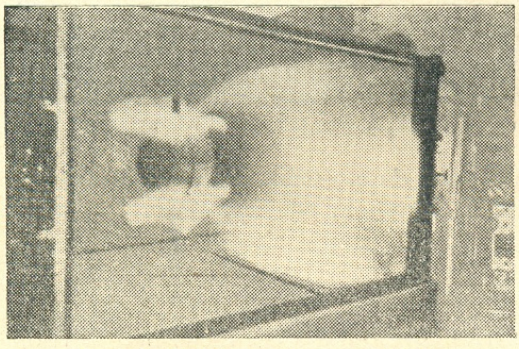
Teorije o postanku

Prva zapažanja o polarnoj svjetlosti dana su u Aristotelovom djelu »Meteorologica« te u Senekinim »Questiones Naturalis«, gdje on opisuje »svijetleću krunu« i navodi, kako je crveni sjaj iznad Ostie bio uzrokom, da su čete Tiberiusa pohrlile prema sjeveru, da bi sudjelovale u borbi tamo, gdje je po njihovom mišljenju bila vatra. — U srednjem je vijeku svaka pojava aurore iznad centralne Evrope izazivala paničan strah.

U mitologiji skandinavskih naroda aurora borealis opisana je kao sjajni odsjev sa štitova walkira, zlatokosih ratnica, koje su odnosile u Walhall duše poginulih junaka. U zemljama sjevera nalazimo i prve pokušaje, da se polarna svjetlost objasni na više ili manje naučnoj podlozi. Stara norveška kronika »kraljevo ogledalo« navodi jednu od najinteresantnijih zamisli: led i glečeri upijaju preko dana Sunčevo svijetlo te njihovim noćnim ižarivanjem nastaju plamenovi polarne svejtlosti. Slično mišljenje zadržalo se mnogo godina kasnije kod Descartes-a i J. Franklin-a. Također se dugo održalo i mišljenje, da je aurora refleks Sunčeve svjetlosti od ledenih polja polarne zone.

Kroz XVII. stoljeće pa nadalje nižu se imena mnogih naučnih radnika, koji su pokušali objasniti pojavu polarne svjetlosti. Među njima se ističe glasoviti astronom Edmund Halley (XVIII. st.), koji je prvi ukazao na povezanost aurore i zemaljskog magnetizma te Henry Cavendish, koji je već 1784. otkrio visinu polarne svjetlosti od približno 100 kilometara.

U toku XIX. stoljeća, naročito za vrijeme Internacionalne polarne godine 1882. i 1883., razne arktičke ekspedicije sakupile su mnogo podataka, korisnih za proučavanje polarne svjetlosti. Sve više prodire ideja, da uzrok polarne svjetlosti treba tražiti na Suncu. Konačno, svojim glasovitim pokusom (1903.) Kristian Birkeland daje podlogu savremenog naučnog istraživanja aurore polaris. On je pretpostavio, da aurore nastaju upadanjem električno nabijenih čestica sa Sunca u najviše slojeve atmosfere, gdje budu privučene djelovanjem magnetskog polja Zemlje i gdje sudarom sa česticama atmosferskih plinova izazivaju svjetlosne efekte iznad polova Zemlje. Da bi dokazao svoju hipotezu, Birkeland je željeznu kuglu, »terellu«, magnetiziranu tako, da ima polove sličnog položaja kao i Zemlja, smjestio u posudu s vrlo razrijeđenim zrakom, što je odgovaralo prilikama u visokim slojevima atmosfere — te je obasjao katodnim zrakama (mlazovi elektrona). Birkelandov je pokus uspio. Oko polova terelle dobio je svijetljenje u obliku spirale, vrlo slično pojavi polarne svjetlosti (sl. 6.).



Sl. 6. Birkeland-ov pokus s „terellom“

Birkeland-ov pokus potaknuo je Carl Störmer-a, tada novo postavljenog profesora matematike u Oslu, da na pojavu aurore polaris primijeni teoriju brojeva. Njegova teoretska obrada polarne svjetlosti, slikovito prikazana raznim modelima, kao i već spomenuti mnogi snimci, ušli su u historiju proučavanja ove pojave kao jedan od najznačajnijih doprinosa njenom općem saznanju.

Moderna shvaćanja postanka polarne svjetlosti, bazirana na najnovijim istraživanjima (napose pokusima A. B. Meinel-a s univerziteta u Chicagu), ne razlikuju se mnogo od osnovnih postavki Störmer-ove teorije. To su u prvom redu »korpuskularna teorija« prof. S. Chapman-a i Ferrara te »teorija izbijanja« prof. H. Alfvén-a (upotpunjena eksperimentima, koje je 1950. izveo L. Block u tehnološkom institutu u Stockholm-u). Iako se spomenute teorije oštro razlikuju u mnogim detaljima obrade, njihove osnovne postavke postanka polarne svjetlosti vrlo su slične. — Alfvén smatra auroru svjetlosnim efektom električnog izbijanja, koje se javlja unutar električnog polja svemirskih naboja, prispjelih sa Sunca u najviše slojeve atmosfere. Njegova je teorija vrlo zamršena i teška, te ćemo ovdje ukratko prikazati lakše shvatljivu »korpuskularnu teoriju«.

Kada na Suncu dolazi do jakih erupcija usijanih plinova, izbačene čestice šire se u svemir u obliku savinutog konusa (stošca) brzinom od približno 1600 km/sek. Ova, teoretski dobivena brzina, potrebna je da bi se čestice mogle gibati nasuprot djelovanju Sunčeve privlačne sile, a dobro se slaže s nastupima polarne svjetlosti oko 26 sata nakon pojave bljeska na Sunčevoj fotosferi. Pretežni sastav korpuskularne struje su negativni elektroni i pozitivni ioni vodika. Na svom putu oko Sunca bit će privučene do izvjesne udaljenosti, a zatim odbijene Zemljinom magnetskom silom natrag u svemir. Čestice se približavaju Zemlji u spiralnim putanjima oko silnica geomagnetskog polja, što se očituje u čestom spiralnom obliku polarne svjetlosti (vidi sl. 5.). U visinama između 100 i 1000 km nadošle čestice odnosno korpuskule sudaraju se s molekulama i atomima kisika i dušika, koji se nalaze u atmosferi u tim visinama u vrlo razrijeđenom stanju. Tako dolazi do t. zv. »sudarne ionizacije«, kojom čestice atmosferskih plinova postaju električki vodljive. Kod ovog procesa javljaju se svjetlosni efekti i posmatrač na Zemlji opazit će (u slučaju vedrog vremena) blistavu pojavu polarne zore. Vodikove čestice sa Sunca bit će najbliže privučene Zemlji tamo, gdje su silnice geomagnetskog polja najgušće t. j. blizu Sjevernog i Južnog magnetskog pola, pa se zato u ovim krajevima polarna svjetlost najčešće vidi.

Uz polarnu svjetlost uvijek su povezane i pojave jačih ili slabijih magnetskih oluja t. j. poremećenja u magnetskom polju Zemlje. Chapman-Ferraro-va teorija obrađuje različite faze neke magnetske oluje i istovremene pojave polarne svjetlosti prilikom nadiranja korpuskula sa Sunca. Izgleda da korpuskule formiraju iznad Zemljinog ekvatora električnu struju velikih dimenzija, koja kruži oko Zemlje u udaljenosti od približno 7 Zemljinih radiusa (radius Zemlje iznosi u grubom 6730 km). Pomoću ove struje tumače se razne faze magnetskih oluja.

Kao što je već rečeno, polarna je svjetlost vrlo česta pojava u zemljama sjevera. U nižim geografskim širinama vidljive su samo naročito intenzivne polarne svjetlosti, koje se javljaju u vrijeme pojačane aktivnosti Sunčeve površine. Kako je ova aktivnost karakterizirana brojem Sunčevih pjega, to se u nastupima polarne svejtlosti u nižim geografskim širinama očituje 11-godišnji period nastupa velikih i brojnih Sunčevih pjega.

Istraživanja u toku MGG

Sve dosadašnje teorije o polarnoj svjetlosti još uvijek ne zadovoljavaju u mnogim pojedinostima. Zato je u toku Međunarodne Geofizičke Godine (od 1. VII. 1957. do 31. XII. 1958.) organizirana mreža stanica, na kojima se vrši motrenje aurore polaris pomoću najmodernijih sredstava. Posebne kamere snimaju čitavo nebo u intervalima od jedne minute, specijalni aparati registriraju pojave aurore i po danu, kada se ona zbog dnevne svjetlosti ne može vidjeti (a istovremene magnetske oluje ukazuju na njenu prisutnost). U istraživanju se mnogo koristi odašiljanje radio valova prema ioniziranim slojevima atmosfere u području polarne svjetlosti te hvatanje odjeka. Konstantno se vrši motrenje površine Sunca te se u slučaju njene pojačane aktivnosti šalju upozorenja u centre za motrenje polarne svjetlosti.

Mreža stanica za motrenje pojave polarne svjetlosti organizirana je i u našoj državi, koja će na taj način također dati svoj doprinos rasvjetljavanju problema ove zagonetne prirodne pojave.

Neke osobine prirodnih brojeva

STANKO PRVANOVIĆ, Beograd

1. Savremena aritmetika razlikuje tri vrste prirodnih brojeva:
   a) broj 1 koji ima samo jedan delilac;
   b) proste brojeve koji imaju samo po dva delioca (1 i sam broj) i
   c) složene brojeve koji imaju po više delilaca.

Broj 1 se izdvaja (on nije ni prost ni složen) zato što ima niz osobina koje nemaju ostali prirodni brojevi. Tako, naprimer, ako sa n označimo ma koji prirodan broj, onda je $\frac{1}{n}$ njegov recipročan broj i recipročan broj broja 1 jednak je samom broju ($\frac{1}{1} = 1$). Samo je zbir delilaca broja 1 jednak samom broju. Zbir delilaca ma kog drugog prirodna broja je veći od samog broja (napr. $1 + 2 > 2$, $1 + 2 + 3 + 6 > 6$). Usled toga, kad bi se i broj 1 priključio skupu prostih brojeva (kao što se to doskora i činilo), morao bi se pri formulisanju mnogih teorema on (broj 1) izuzimati.

2. a) Poznat je Eratostenov* postupak za izdvajanje prostih brojeva od 2 do određenog broja n. Napišu se svi prirodni brojevi od 2 do n pa se precrtaju: (1) svi parni brojevi, jer su deljivi brojem 2; (2) svi brojevi deljivi brojem 3 koji još nisu precrtani (9, 15, 21 itd. jer su 6, 12, 18, ... već precrtani kao parni); (3) svi neprecrtani brojevi deljivi brojem 5 (25, 35, ...); (4) svi neprecrtani brojevi deljivi brojem 7 itd. Tim postupkom, koji se zove i »Eratostenovo sito«, sastavljena je dosad tablica prostih brojeva do 12 000 000. On je siguran, ali je vrlo pipav i zamoran. Utoliko zamorniji ukoliko su brojevi veći, ukoliko se dalje ide duž prirodnog niza brojeva.

b) Usled toga, matematičari i matematičari-amateri pronašli su i druga »sita«. Jedno od njih je ovo. Napiše se (što je vrlo lako) tablica:

4	7	10	13	16	19	. . .
7	12	17	22	27	32	. . .
10	17	24	31	38	45	. . .
13	22	31	40	49	58	. . .
. . . . .						, ,

I onda: *Ako se u njoj nalazi broj h, broj $2h + 1$ je sigurno složen. Ako se broj h ne nalazi (u Tablici), broj $2h + 1$ je sigurno prost broj.*

Dokaz. Primetimo, pre svega, da je svaki red (kao i svaki stubac (Tablice beskonačna aritmetička progresija, da su razlike tih progresija redom svi neparni brojevi (3, 5, 7, ...) i da druga progresija počinje drugim članom prve, treća počinje trećim članom prve, četvrta — četvrtina članom prve itd. Označimo sa a_{nk} n-ti član k-te progresije a sa d_k razliku te k-te progresije, napr.: $a_{11} = 4$, $d_1 = 3$; $a_{53} = 38$, $d_3 = 7$. Tada je, prema poznatoj formuli $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$,

$$a_{n1} = 4 + 3\,(n - 1) = 1 + 3\,n,$$
$$a_{n2} = 7 + 5\,(n - 1) = 2 + 5\,n,$$
$$a_{n3} = 10 + 7\,(n - 1) = 3 + 7\,n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

pa je $a_{1k} = 1 + 3\,k$, $d_k = 1 + 2\,k$,

i otuda $a_{nk} = 1 + 3\,k + (n - 1)\,(1 + 2\,k) = k + n\,(2\,k + 1)$,

gde su k i n ma koji prirodni brojevi.

[Napr.: $a_{62} = 2 + 6\,(2 \cdot 2 + 1) = 32$; $a_{123} = 3 + 12 \cdot 7 = 87$].

* Grk Eratosten je živeo od 276 do 196 g. pre naše ere.

Ako se, dakle, broj h nalazi u Tablici on je jedan od brojeva a_{nk} tj. ima oblik

$$h = k + n(2k + 1).$$

Zato je

$$2h + 1 = (2k + 1)(2n + 1),$$

tj. broj $2h + 1$ je proizvod dva činioca, različita od 1, dakle složen broj, što je i trebalo dokazati.

Obrnuto, ako je $2h + 1$ neparan složen broj, on se može napisati kao proizvod dva neparna broja, različita od 1, tj.:

$$2h + 1 = (2k + 1)(2n + 1),$$

gde su k i n ma koji prirodni brojevi. Iz te jednakosti dobivamo

$$h = \frac{(2k + 1)(2n + 1) - 1}{2} = k + n(2k + 1) = a_{nk},$$

tj. broj h je jedan od brojeva Tablice.

Znači, od svakog broja h koji se nalazi u Tablici može se načiniti samo složen broj $2h + 1$ i svakom unapred datom neparnom složenom broju oblika $2h + 1$ odgovara broj h koji se nalazi u Tablici. A kako su svi prosti brojevi (osim broja 2) neparni, a svaki neparan broj (osim broja 1) je prost ili složen, zaključujemo da prost neparan broj oblika $2h + 1$ nema svog odgovarajućeg broja u Tablici.

Naprimer: U Tablici nema broja $h = 5$, pa broj $2 \cdot 5 + 1 = 11$ je prost broj. U Tablici nema broja $h = 6$, pa broj $2 \cdot 6 + 1 = 13$ je prost. Broj $h = 7$ nalazi se u Tablici, pa je broj $2 \cdot 7 + 1 = 15$ složen broj. Broj 40 se nalazi u Tablici pa je broj $2 \cdot 40 + 1 = 81$ zaista složen broj.

c) No i ovo »sito« nije lak posao kad su brojevi vrlo veliki. Zbog toga, a još više gonjeni matematičkom radoznalošću i matematičkom strašću, matematičari su za mnoge velike brojeve naučno dokazali da su prosti ili složeni. Tako je 1883 godine dokazano da je broj

$$2^{61} - 1 = 2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$$

prost broj. Dugo vremena (75 godina) je

$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$ bio najveći poznati prost broj! Međutim, 21 avgusta 1952 godine je elektronskom mašinom izračunato, za $13\frac{1}{2}$ minuta, da je broj $2^{1279} - 1$, koji se, na pozicioni način piše sa 386 cifara, prost. Oktobra iste godine dobiven je, istom elektronskom mašinom, još veći prost broj: $2^{2281} - 1$. To je danas najveći poznati prost broj.

Nedavno (pre 5 godina) jedan ruski student je dokazao teoremu:

Broj oblika $2^n - 1$ je uvek deljiv prostim brojem $2n + 1$ ako n ima oblik $6p - 1$, gde je p paran broj. Broj $2^n + 1$ je uvek deljiv prostim brojem $2n + 1$ ako je n oblika $6p - 1$, gde je p neparan broj.

Na osnovu te teoreme, a posle veoma dugog i napornog računanja, on je pokazao da je $2^{5002331} - 1$, koji se piše sa više od 1 500 000 cifara, složen broj i da je deljiv brojem 10 004 663.

Po navedenoj teoremi se, dakle, složeni brojevi relativno lako nalaze, ali izračunavanje njihovih delilaca nije nimalo lak posao. Naprimer, dokazano je još ranije (pre nego što je pronađena navedena teorema) da je $2^n - 1$ složen broj za $n = 101$, 103, 109, 137, 139, 149, 241 i 257, ali do danas nije izračunat nijedan njihov prost delilac.

d) Koliko je to teška stvar vidi se i iz ove činjenice. Čuveni francuski matematičar Pierre de Fermat (1601—1665) tvrdio je (oko 1640 godine) da su brojevi oblika $2^{2^n} + 1$, za svaki prirodan broj n, prosti. Međutim, ti brojevi, koji se zovu Fermatovi brojevi, i kratko se označavaju sa F_n, su sigurno prosti za $n = 0$, 1, 2, 3 i 4 ($F_4 =$

= 65 537). Već $F_5 = 4\,294\,967\,297$ je složen, kao što je dokazao još Euler (1707—1783), i deljiv je brojem 641. Posle toga nađeno je još 14 složenih Fermatovih brojeva (za $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 23, 26, 38$ i 73), a tek 1957 godine je matematičar Selfridge izračunao, pomoću elektronske mašine, da su i Fermatovi brojevi za $n = 39, 55, 63, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 268, 284, 316$ i 452 složeni. Na taj način najveći danas poznat Fermatov broj je $2^{2^{452}} + 1$. On se piše sa 10^{135} cifara. Jedan od njegovih delilaca je $27 \cdot 2^{455} + 1$ čiji je broj cifara, u pozicionom sistemu, 139.

Koliko je Fermatov broj F_{452} veliki može se zamisliti ako navedemo da se broj F_{23} (čiju je deljivost sa 167 772 161 dokazao, još 1878 g. ruski matematičar-amater Pervušin) piše sa 2 525 223 cifre, što znači da kad bi se on štampao, knjiga, običnog formata, bi iznosila 1 000 strana!

3. Iz prethodnog izlaganja može se naslutiti da ne postoji opšta formula koja bi omogućila neposredno određivanje da li je ma koji prirodan broj prost ili složen. I zaista, takva formula, uprkos mnogih traganja za njom, nije dosad pronađena. Ostaje i dalje da se prosto proba da li je dati broj deljiv nekim od manjih (od njega) brojeva. No takva faktorizacija u slučaju velikih brojeva je praktično neprimenljiva. Pomoću računske mašine, međutim, koju je nedavno konstruisao Lehmer, posao se vrlo brzo svršava. Naprimer, tom mašinom je za 3 sekunde izračunato da je

$$2^{93} + 1 = 529\,510\,939 \cdot 2\,903\,110\,321 \cdot 715\,827\,883 \cdot 3^2.$$

4. Isto tako do danas nije u potpunosti rešen ni problem: Koliko prostih brojeva ima od 2 do ma kog prirodna broja x. Metodama više matematičke analize najveći matematički umovi uspeli su da dođu samo do približnih formula za izračunavanje broja prostih brojeva od 2 do x. Prvi krupan rezultat u tom pogledu postigao je ruski matematičar Čebišev (1821—1894). Nažalost, Čebiševljevu formulu ne možemo ovde da iznesemo (jer daleko premaša matematička znanja koja pruža srednja škola). Približna formula, koja se danas najčešće upotrebljava za izračunavanje prostih brojeva glasi

$$\pi(x) \approx \frac{0{,}43429\ldots}{\log x} \cdot x.$$

Zanimljivo je da broj prostih brojeva koji se izračunava po formuli Čebiševa, a koji se označava sa Li, u svakom intervalu od 2 do 12 000 000 veći od stvarnog broja prostih brojeva. Naprimer, do 10 je $\pi(x) = 4$ a $Li = 6$; do 100 je $\pi(x) = 25$, $Li = 29$; do 1 000 je $\pi(x) = 168$, $Li = 178$; do 1 000 000 je $\pi(x) = 78\,498$, $Li = 78\,628$; do 10 000 000 je $\pi(x) = 664\,579$, $Li = 664\,918$.

Međutim, 1933 godine dokazano je da daleko, vrlo daleko iza 10 000 000, postoji broj oko kojega je Li manji od $\pi(x)$. Približna vrednost tog broja je

$$x \approx 10^{10^{10^{34}}}$$

tj. broj koji se, na pozicioni način piše sa 1 i ovoliko nula

$$10^{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}.$$

To je najveći broj s kojim se do danas susrela nauka. Njegova »ogromnost« može se »zamisliti« kad se uzme u obzir ono što je rečeno za F_{23}.

5. a) Jasno je da se na proste brojeve sve ređe nailazi ukoliko se duž niza prirodnih brojeva udaljavamo od njegova početka. Štaviše, postoje ogromni razmaci toga niza u kojima nema ni jednog prostog broja. Naprimer: Ako pomnožimo sve prirodne brojeve od 1 do 100 000 001, dobivamo broj

$$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots 100\,000\,001.$$

Posle toga sledi, jedan za drugim, 100 000 000 brojeva oblika

$$n + 2,\ n + 3,\ n + 4, \ldots,\ n + 100\,000\,000,\ n + 100\,000\,001$$

koji su sve složeni jer: prvi je deljiv brojem 2 (svaki sabirak njegov deljiv je brojem 2), drugi je deljiv brojem 3, ..., poslednji je deljiv brojem 100 000 001.

b) Pri svem tom skup prostih brojeva je neograničen (beskonačan). To je dokazao još Euklid (oko 300 godina pre n. e.). Nešto izmenjen taj dokaz izgleda ovako.

Pretpostavimo da je skup prostih brojeva ograničen, tj. da postoji najveći prost broj p. Tada ih možemo pomnožiti i dobiti broj

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \ldots p.$$

Sad posmatrajmo broj $n + 1$. On je veći od najvećeg prostog broja p i, prema našoj pretpostavci, nije prost nego je složen. A to znači: (1) da je $n + 1$ deljiv bar jednim prostim brojem a i (2) da je a jedan od činilaca broja n (jedan od brojeva 2, 3, 5, 7, ..., p), tj. da je i broj n deljiv brojem a. To, pak, ne može biti, jer ako su brojevi $n + 1$ i n deljivi brojem a, onda mora i njihova razlika $(n + 1) - n = 1$ biti deljiva brojem a, a to očigledno nije.

Dakle, naša pretpostavka da postoji najveći prost broj ne može se održati. Skup prostih brojeva je neograničen.

c) Matematičar Dirichlet (1805—1859) dokazao je da svaka aritmetička progresija

$$a,\quad a + d,\quad a + 2d,\quad a + 3d, \ldots$$

gde su a i d međusobno prosti brojevi, sadrži neograničeno mnogo prostih brojeva. Nažalost, taj dokaz nije elementaran.

Feromagnetizam

MILAN NAPIJALO, Beograd

Magnetne osobine gvožđa i ostalih feromagnetika, tj. supstanci, koje se u magnetskom pogledu ponašaju analogno gvožđu, poznate su odavno.

Proučavanje ovih osobina omogućilo je da se izvedu izvesni empiriski tj. iskustveni zakoni, što je našlo praktičnu primenu u raznim granama fizike i elektrotehnike. Čitav niz uređaja, počevši od magnetnog kompasa i električnog zvonca pa do radioaparata i magnetofona, zasniva se na iskorišćavanju magnetnih osobina feromagnetika. Međutim, još uvek ne postoji potpuna, konačna teorija feromagnetizma a prva uspešnija tumačenja javila su se tek tridesetih godina ovoga veka.

Sve supstance, u svim agregatnim stanjima, podvrgavaju se dejstvu magnetnog polja, ali se samo feromagnetici već u magnetnim poljima, koja se lako ostvaruju, jako namagnetišu pa se obično popularno označavaju kao »magnetne« supstance za razliku od drugih »nemagnetnih« supstanci. Tačnije uzevši ono što karakteriše feromagnetike jeste:

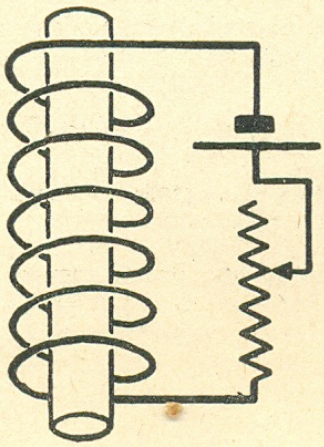
1) postojanje histerezisnog ciklusa kod premagnetisavanja,

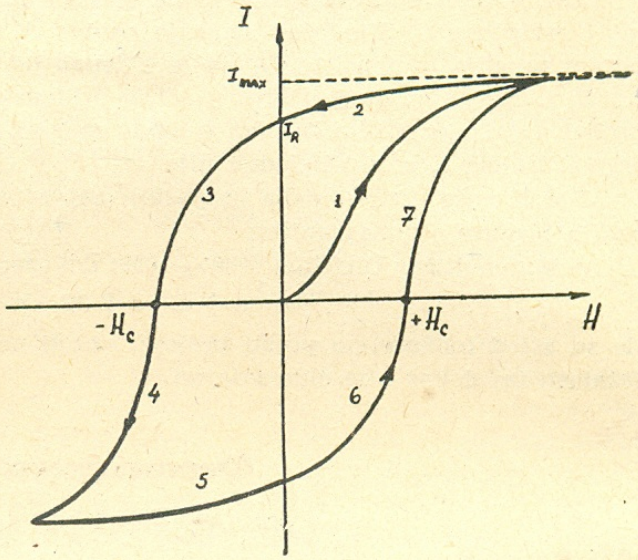
2) zasićenje magnetizacije već u magnetnim poljima, koja se lako dobijaju,

3) tzv. Kirijeva (Curie) tačka, temperatura na kojoj iščezavaju feromagnetske osobine.

Pokušaćemo to da objasnimo u najkraćim crtama. Pretpostavimo da smo stavili jedan komad nenamagnetisanog gvožđa u soleноid, koji se može priključiti za neki izvor jednosmerne struje. Kad se zatvori strujno kolo, magnetsko polje soleноida (H) magnetizuje gvožđe. Jačina njegovog namagnetisavanja, tzv. magnetizacija (I), pri jačanju magnetskog polja uvećava se kao što je pokazano na sl. 1 (kriva 1). U početku magnetizacija raste brzo, a zatim sve sporije da bi

при некој довољно великој јачини магнетног поља постигла максимално могућу вредност (I_{max}). Тада наступа магнетно »засићење«. Даље увећавање магнетног поља нема никаквог утицаја. Ако магнетно поље почиње да слаби, магнетизација се неће мењати на исти начин, већ ће за сваку јачину магнетног поља имати већу вредност при размагнетисавању него при намагнетисавању (крива 2). Кад јачина магнетног поља постане једнака нули, тј. кад се прекине струја кроз соленоид, магнетизација неће бити једнака нули — гвожђе ће се одликовати неком »заосталом магнетизацијом« I_R. Да би се гвожђе размагнетисало, мора се поново пропустити струја кроз соленоид, али у супротном смеру, и тек при некој јачини





Сл. 1

магнетног поља — H_c тзв. коерцитивно поље (коерцитивна »сила«), гвожђе ће се размагнетисати. Ако би се магнетно поље и даље појачавало у овом смеру, гвожђе би почело поново да се магнетизује, али сада у супротном смеру у односу на први процес магнетизовања (крива 4). Размагнетисавање би се вршило као и раније. Укратко, ако би се магнетско поље мењало по величини и смеру магнетизација гвожђа мењала би се тако да би се процес намагнетисавања могао да прикаже затвореном кривом 2—3—4—5—6—7, тзв. хистерезисном петљом. На основу класичне физике може се показати значење ове петље. На намагнетисавање и размагнетисавање гвожђа троши се извесна енергија, која се претвара у топлоту, а овај губитак енергије сразмеран је површини хистерезисне петље.

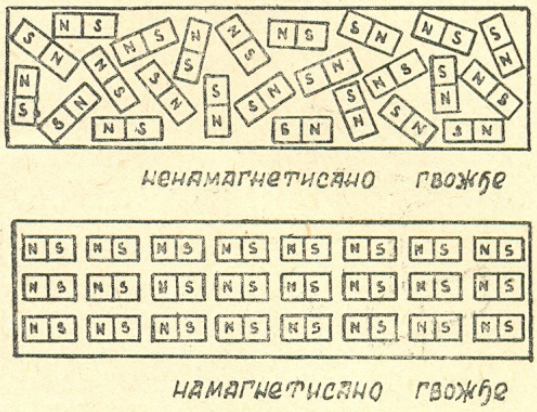
Показује се да магнетне особине феромагнетика опадају са повишењем температуре. Магнетизација засићења (I_{max}) постаје све мања и на некој одређеној температури феромагнетне особине ишчезавају — на пр. гвожђе престаје да буде феромагнетно на 770° C и постаје парамагнетно, тј., понаша се као један део »немагнетних« супстанци. Ако се поново охлади испод ове температуре, тз., Кириеве тачке, гвожђе поново постаје феромагнетно. Постојање Кириjеве тачке за феромагнетике показује да је феромагнетизам карактеристичан за одређено стање (кристални облик) у коме се налази дата супстанца.

Пошто су показане основне одлике феромагнетика покушаћемо да изложимо на приступачан начин како се оне могу да протумаче.

Ломљењем једне магнетне шипке добиће се два магнета и т. д. — даљим дељењем увек би се добили нови »магнетићи«, па би се због тога могло помислити

да је најједноставније предпоставити да су феромагнетици образовани од малих »елементарних магнетића«. У ненамагнетисаном феромагнетику ови мали магнети управљени су на све стране тако да је резултантна магнетизација једнака нули; у намагнетисаном стању сви су оријетисани паралелно (Сл. 2).

Пошто је Бор (N. Bohr) поставио основе атомске теорије и протумачио неке основне законитсти у оптичким спектрима, изгледало је природно да се горе поменути »елементарни магнетићи« идентификују са атомима. Према Боровом моделу атома електрони круже око језгра у атому, а то би значило, како кретање електрона претставља протицање неке »микро-струје«, да би сваки атом могао да се посматра као извор магнетског поља — тј. као елементарни магнет. Изгледало би да је самим тиме нађено и решење за феромагнетизам. Међутим, израчунавања су оповргла ово мишљење. Заостала магнетизација, која је толико карактеристична за феромагнетике могла би да се прикаже као последица међусобног дејства атомских магнета. Али ако се узму бројне вредности, које даје Борова теорија и израчуна енергија међусобног магнетског дејства атома, налази се да би и најслабије топлотно кретање атома, већ на неколико степени изнад апсолутне нуле (—273° C), могло да изазове размагнетисавање. Ово се никако не слаже са чињеницом да Киријева тачка за гвожђе лежи на преко 700° C.



Сл. 2

Почетком овог века, пре постављања Борове теорије, Вајс (Weiss) је претпоставио да је за објашњење феромагнетизма потребно увести две хипотезе:

1) у феромагнетицима постоје мале области, тзв. »магнетни домени«, који су намагнетисани до засићења. Под дејством неког »унутрашњег поља« у појединим доменима атоми су оријетисани паралелно а тек при некој одређеној температури, у Киријевој тачки, ова паралелна оријентација се нарушава и ишчезава магнетизација.

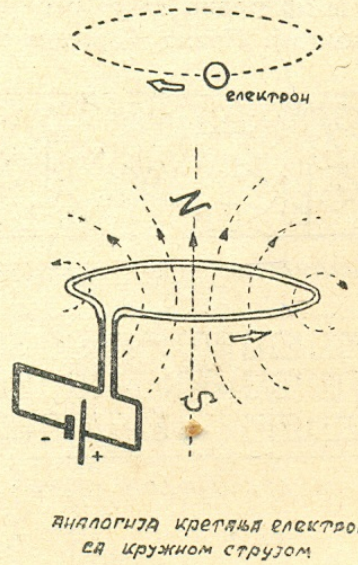
2) феромагнетици се јављају у ненамагнетисаном стању због тога што се састоје из великог броја домена чије су магнетизације управљене на све стране и намагнетишу се тек кад спољашње магнетно поље изазове њихово оријетисање.

Вајс није био у стању да протумачи, на основу тада постојећих знања, природу »унутрашњег« поља, али су се основне идеје садржане у ове две хипотезе показале као исправне и нашле своје објашњење у савременој физици.

Тридесетих година овог века Хајзенберг (Heisenberg) и Френкел (Френкељ) изложили су независно један од другог идеју по којој се »унутрашње поље« може протумачити на основу квантне механике.

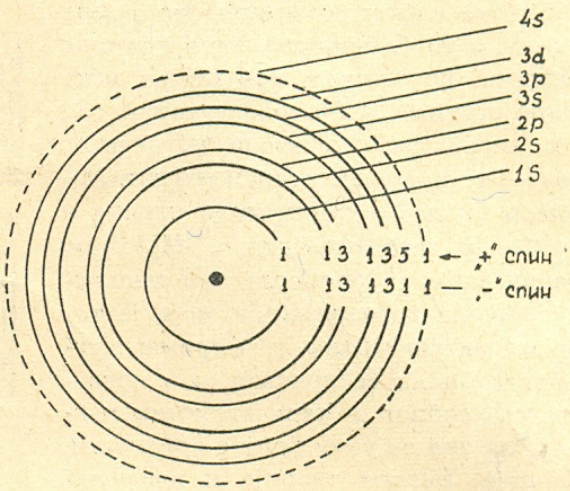
Магнетне особине атома могу да се изведу из Боровог атомског модела. Према Бору у атому круже електрони око атомског језгра, при чему су распоређени по различитим путањама (орбитама) које одговарају различитим енергијама. Кружење електрона може да се схвати као мала кружна струја (сл.3), као »соленоид са једним навојком«, па одатле следи да се свакој орбити електрона може да припише »магнетни момент« тј. да се она може схватити као магнет. За тумачење сложених односа у атомским спектрима Гаудсмит и Уленбек (Goudsmit и Uhlenbeck) претпостављају да се електронима треба да припише и »спин« — електрон не само да кружи око атомског језгра, већ се уједно окреће сам око себе. Ово допунско кретање електрона изазива и нов допунски магнетни момент атома. Развој квантне

механике показао да је Боров модел атома, који приказује стање у атому на један приступачан, очигледан начин, не одговара потпуно реалности и да се збивања у атому не могу да прикажу моделима. Али величине, које су биле уведене са Боровим моделом као што су спин и орбитални момент, задржале су се и у квантној механици, само што немају онај очигледан смисао као у Боровој теорији.



Аналогија кретања електрона са кружном струјом

Сл. 3



Сл. 4

Електрони су у атомима расподељени по енергетским нивоима што према Боровом моделу одговара различитим орбитама. Сваки ниво дели се на поднивое и ови могу да приме одређен број електрона. Електрони теже да заузму слободна места на нивоима ближим језгру, јер ова места одговорају стањима мање потенцијалне енергије у односу на језгро атома. Због тога су најнижи нивои попуњени код атома свих елемената, док остају непопуњени само посљедњи-периферискн поднивои. Међутим, код неких елемената постоји изузетак у изградњи електронског омотача атома. Код ових атома почиње попуњавање новог поднивоа, а да последњи подниво није попуњен. Слика 4 приказује случај атома гвожђа. Арапски бројеви означавају нивое а слова s, p, d, могуће поднивое. Подниво 3d може да прими 10 електрона; међутим у атому гвожђа почиње изградња 4s поднивоа, ма да се у 3d поднивоу налази 6 електрона. Слична појава постоји и код других феромагнетних елемената.

Спинови електрона на једном поднивоу могу да буду оријентисани у истом или супротном смеру. Са становишта Боровог атомског модела то би значило да се сопствено окретање електрона може да врши у истом или у супротном смеру. Ако се један смер означи »+« а други са »—« онда се стање у атому гвожђа може да прикаже као што је показано на сл. 4.

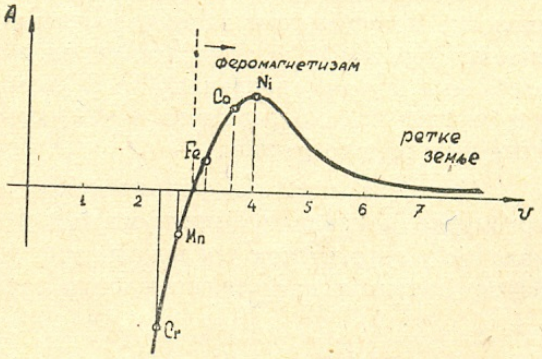
Као што се види са слике, у свим попуњеним поднивоима исти је број електрона са спином »+« и електрона са спином »—«. Магнетни моменти који потичу од спина међусобно се компензују тако да су попуњени поднивои »неактивни« у магнетном погледу. Али у непопуњеном поднивоу 3d пет електрона имају спин »+« а један електрон има спин »—«. Према томе овде постоје 4 некомпензована електронска спина и они су пародавни за репултантни магнетни момент атома У перифериским поднивоима гвожђа (непопуњеним) такође могу да буду електрони са некомпнезованим спиновима; међутим огледи су показали да ови електрони, који играју улогу при остварењу међуатомних, валентних веза, мало доприносе магнетном моменту атома као целине.

Даље, магнетни моменти орбита утичу на магнетни момент атома. Међутим у металу као блоку образованом од огромног мноштва атома, из још увек неразјашњених разлога, орбитални магнетни моменти немају практично никаквог утицаја на магнетно понашање метала.

На основу досадашњег излагања следи да је један од услова за појављивање феромагнетизма постојање некомпензованих спинских магнетских момената, који могу да се јаве само у атомима са непопуњеним електронским подниводима. Ово је само неопходан а не и довољан услов за феромагнетизам; напр. група тзв. прелазних елемената у периодном систему: Sc, Ti, V, G, Mn, Fe, Co, Ni. има непопуњен 3d подниво, али међу овим елементима феромагнетни су само Fe, Co, и Ni.

У квантној механици се показује да енергија једног система од више електрона зависи од тога како су оријентисани спинови електрона; другим речима, укупна енергија система електрона зависи од резултантног магнетног момента система. Израчунавања су показала да се може десити да буде енергетски повољније оно стање у коме су сви спинови оријентисани у истом смеру, тј. да је стабилније стање у коме систем има своју »спонтану« магнетизацију.

Приликом израчунавања енергије, која доводи до спонтане магнетизације примењује се једна упрошћена квантномеханичка метода, код које се претпоставља да се електрон једног атома у феромагнетику може наћи у близини језгра суседног атома и обрнуто, да електрон суседног атома може да се нађе у близини језгра датог атома. Изгледало би као да међу атомима постоји измена електрона. Због тога се поменута енергија означава као енерцгија измене а силе међусобног дејства спинова као силе измене.



Сл. 5

Енергија измене у великој мери зависи од међуатомских размака. На растојањима, која су знатно већа од међуатомских размака у металима, силе измене су сувише слабе да би одржале паралелну оријентацију спинова и нема феромагнетизма. Са смањивањем међуатомских растојања ове силе расту и појављују се феромагнетизам, који је све јаче изражен што су ови размаци мањи, али само до извесне границе. Ако међуатомска растојања постану још мања мењају се енергетски односи и постаје повољнији случај кад се спинови узајамно компензују и када је и резултантна магнетизација једнака нули. Оваква тела, као што су напр. Cr и Mn означавају се као антиферомагнетна.

На сл. 5 приказана је шематски зависност енергије измене A од величине v, где је

$$v = \frac{\text{полупречник непопуњеног електронског поднивоа}}{\text{размак међу атомима}}$$

Из приложене слике види се да феромагнетизам настаје када је енергија измене позитивна. Ово је други неопходан услов за настајање феромагнетизма. На десној грани криве назначено је да и ретке земље (лантаниди), код којих су непопуњени 4f и 5d поднивои, имају позитивну енергију измене па према томе постоји могућност да и оне буду феромагнетне. Заиста, утврђен је феромагнетизам код гадолинијума (Gd) а изгледа и код диспозиума (Dy) и ербиума (Er), само што код ових елемената Кириева тачка лежи врло ниско.

На тај начин, феромагнетизам може да се протумачи на основу квантне механике увођењем једног новог типа сила — сила измене. Према ранијем излагању силе измене одговарале би оној загонетној врсти сила, које према Вајсу стварају »унутрашње поље« у запремини једног магнетног домена. Али, остаје неизвесно зашто је феромагнетик подељен на домене — области, које су намагнетисане до засићења а сам је као целина немагнетан. Због енергије измене било би најповољније стање у коме су сви атоми у феромагнетику тако оријетисани да њихови некомпензовани спинови, а то значи атомски магнетски моменти, имају исти смер.

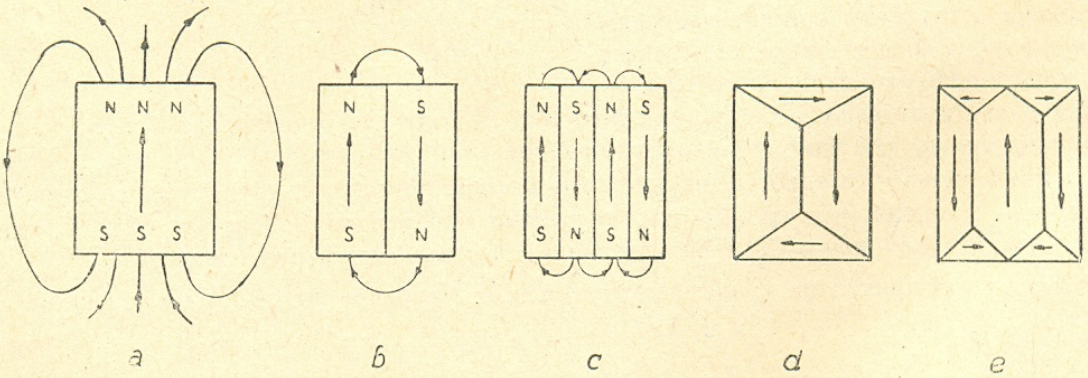
Испитивања су показала да силе измене претстављају одлучујући фактор за оријентисање атома у врло малим областима феромагнетика. Ове области имају различите размере у зависности од природе материјала и његове чистоће, а могу да имају линеарне димензије до 0,1 мм што одговара запремини од 0,001 мм^3. Кад се посматра феромагнетик као целина, морају се узети у обзир и други фактори. Феромагнетик ће се јављати у стању, које је енергетски најповољније, а оно је одређено минимумом збира различитих енергија као што су:

магнетна енергија — ова енергија везана је за постојање магнетних полова на површини феромагнетика или површини домена;

енергија кристалне анизотропије — ова енергија зависи од правца магнетизације у односу на кристал. У феромагнетицима постоје правци »лакшег« и »тежег« магнетизовања.

Затим, овде спада енергија границе домена, која је везана за извесне појаве аналогне површинском напону, магнетоеластична енергија, која је изазвана зависношћу димензија феромагнетика од његовог магнетног стања итд. Осим тога, треба имати у виду чињеницу да се феромагнетици обично јављају са структурним и хемиским нехомогеностима, о чему се при тумачењу феромагнетизма силама измене није водило рачуна.

Магнетна енергија феромагнетика зависи од његових слободних полова и сразмерна је квадрату јачине магнетног поља које они стварају. Због тога је повољније у енергетском погледу да у феромагнетику постоји више домена у којима ће оријентација магнетизације бити таква да ће спољашње магнетно поље бити

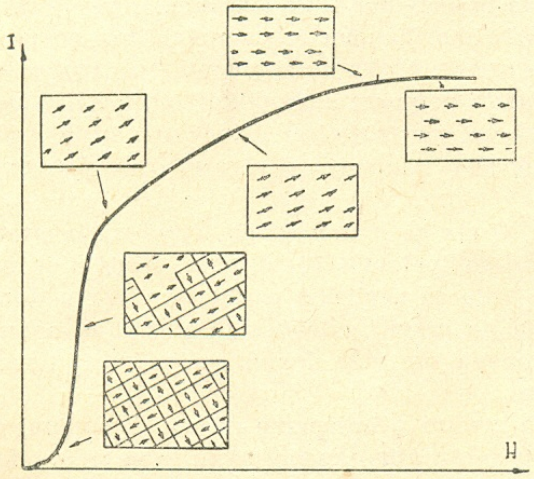


Сл. 6

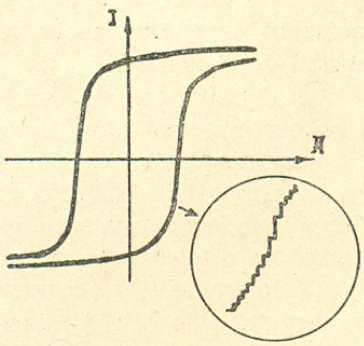
што слабије. Говорећи сликовито, магнетне линије силе ићи ће у том случају из домена у домен (сл. 6d и e), а не кроз околни простор (сл. 6a и b). Постојање суседних домена са спиновима оријентисаним у супротном смеру доводи до појаве нарочитог стања на граници ових домена, јер су овде спинови оријентисани насупрот тежњи силама измене. Због тога се појављује поменута енергија граница, која је сразмерна граничним површинама домена.

Пошто је укратко изложено како се са становишта савремене физике објашњава феромагнетизам може се још укратко показати како се на основу постојећих теорија објашњава процес магнетизовања приказан на сл. 1.

Описана »домен-структура« феромагнетика претставља нормално стање у феромагнетику, које се јавља кад феромагнетик кристалише из растопа, кад није изложен спољним магнетним утицајима. Међутим, кад се феромагнетик изложи дејству магнетског поља његово раније енергетски најповољније стање почиње да се мења. Ток промена био би следећи. У ненамагнетисаном феромагнетику постоје домени са најразличитијим оријентацијама њихових магнетизација. Кад се укључи магнетно поље магнетизација неких домена има смер, који је близак смеру магнетног поља. Ови домени су у »повољном« положају у односу на остале и у првој фази намагнетисавање се састоји у померању граница међу доменима. У јачим магнетним пољима, кад се заврши ова фаза процеса магнетизовања, долази до окретања магнетних момената домена у смеру поља. То се окретање дешава у етапама. Прво се магнетни моменти оријетишу постепено у смеру једне од оса лакшег магнетизовања, чији је смер близак смеру спољашњег магнетног поља а затим у врло јаким пољима домени се оријетишу у смеру поља. Кад су сви домени оријентисани у смеру поља постиже се тз. техничко засићење. Најзад, у врло јаким пољима, магнетизација феромагнетика расте и даље док се коначно сви спинови и магнетни моменти појединих електрона не оријетишу паралелно магнетичном пољу; у слабијим пољима топлотно кретање спречава да се постигне максимално могућа магнетизација — право засићење. Горње излагање илуструје сл. 7.



Сл. 7



Сл. 8

Прва фаза магнетизовања — померање граница домена врши се насупрот отпору, који овом померању пружају разна места у кристалима, у којима постоје дефекти структуре, примесе и разни други узроци нехомогености. Управо ова фаза процеса захтева известан утрошак енергије који се претставља површином хистерезисне петље.

На крају поменућемо да теорија о магнетним доменима налази своју потврду посредно у томе што је у стању да објасни сложено понашање феромагнетика, али она има и јаку непосредну потврду у експериментима, који на врло убедљив начин показују постојање домена. Како је било речено, процес намагнетисавања у фази која одговара стрмом делу криве (сл. 7) састоји, се у померању граница међу доменима. За овакво померање потребна је нека минимална енергија, која је управо

довољна да се савладају разни отпори овом померању. При појачању спољашњег магнетног поља постижу се за разне домене услови за померање граница у различитим тренутцима па се ови процеси одигравају један за другим. Свако померање граница — тј. свако ишчезавање домена са неповољном оријентацијом претставља допринос магнетизацији феромагнетика па се ова због тога мења у малим скоковима а не континуирано. Непрекидна »глатка« крива са сл. 1 при финијем посматрању претставља у ствари степенасто изломљену линију — сл. 8. Ово се заиста и запажа кад се намагнетисавање прати осетљивим електронским уређајима.

Други начин да се покажу домени састоји се у томе да се углачана површина феромагнетика поспе фино опрашеним феромагнетним прашком и да се посматра помоћу микроскопа. На границама домена постоје ипак слаба локална поља отприлике као што је шематски приказано за сл. 6c. На овим местима окупља се феромагнетни прашак. На површини феромагнетика јављају се микроскопски мале фигуре, које потпуно личе на сл. 6e. Кад се феромагнетик подвргне дејству магнетног поља ове се фигуре мењају, што врло лепо показује узрок настајања ових фигура.

Iz teorije skupova

IGNACIJE SMOLEC, Zagreb

1. Uvod

Zgrada matematičke nauke počiva na pojmovima broja i geometrijske tvorevine. Broj je nastao iz potrebe da se utvrdi koliko članova (elemenata) ima neki *skup* (porodica, stado, hrpa i t. d.); svaka je geometrijska tvorevina u biti svojoj *skup* točaka. Tako je skup, kao jedan od osnovnih pojmova aritmetike i geometrije, ugrađen u same osnove matematike. On u stvari povezuje (na način koji ćemo kasnije upoznati) ova dva naoko različita područja naučnih istraživanja u jedinstvenu nauku — matematiku.

Kad je spoznaja o značenju pojma skupa za matematička istraživanja prodrla u svijest matematičara, što se zbilo u drugoj polovini 19. stoljeća, nastala je nova matematička disciplina, *teorija skupova,* koja se neobično naglo razvijala u dubinu i u širinu, te je u znatnoj mjeri utjecala na razvoj gotovo svih područja matematike. U modernoj matematici teorija skupova sve više dobiva na važnosti i njezin utjecaj na ostale grane matematike raste.

Kako je teorija skupova zajedno sa svojim primjenama mlada disciplina, nije još uspjela u dovoljnoj mjeri prodrijeti u srednjoškolske nastavne programe, iako u mnogim zemljama prodire u njih. Budući pak da je pojmovna i operativna vrijednost te teorije stvarno velika, odlučili smo, da makar i u skromnom opsegu upoznamo s njom čitaoce Matematičko-fizičkog lista.

Da bismo što bolje spoznali vrijednost pojma skupa, napomenimo, da on nema tako važnu ulogu samo u matematici. *Opažanja* se prvobitno odnose na *pojedine* predmete i pojave. No već najjednostavnije *umne operacije* moguće su samo u *skupovima* predmeta i pojava. Tako uspoređivanje, asocijacije predodžbi, povezivanje u logičke cjeline (klasifikacija, silogizam i t. d.) sami po sebi uključuju postojanje više od jednog predmeta, predodžbe, pojave, suda i t. d. Konačno i u najjednostavnijim rečenicama operiramo s pojmovima. No pojam izvire iz činjenice, da objekti opažanja, mišljenja i t. d. dolaze u skupovima. Da na primjer postoji *jedno* jedino drvo na svijetu, mi bismo imali *predodžbu* tog drveta, ali ne i *pojam* drveta. Pojam drveta nastao je iz promatranja i uspoređivanja *velikog broja* drveća. Skupovnost je jedno od najopćenitijih i najosnovnijih svojstava svijeta u kojem živimo. Ono je

jedna od dijalektičkih crta svijeta. Jer dijalektika i znači povezivanje pojava i pojmova, njihovo međusobno uslovljavanje i prožimanje, prelaženje jednih u druge, a sve je to moguće samo zato, što ne dolaze pojedinačno, nego u skupovima (kolektivima).

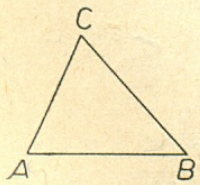
Poznato je, da su dvije osnovne metode naučnih istraživanja *indukcija* i *dedukcija*. Indukcija znači proučavanje velikog broja predmeta, pojava ili pojmova i traženje njihovih zajedničkih, dakle općih svojstava. Indukcija je dakle zaključivanje od pojedinačnih elemenata skupa na skup kao cjelinu. Dedukcija pak znači zaključivanje od općeg na pojedinačno, a to znači da poznajemo svojstva skupa objekata (predmeta, pojava, pojmova) i za pojedinačne objekte treba samo utvrditi, da li pripadaju tom skupu ili ne pripadaju i kako se na njima (ukoliko mu pripadaju) očituju ta svojstva. Na primjer: Svi jednakokračni trokuti formiraju posebni skup S u skupu svih trokuta. (Jednakostranični trokuti samo su specijalan slučaj jednakokračnih). Uspoređivanjem pojedinačnih trokuta iz skupa S između sebe i s ostalim trokutima, došlo se do općeg zaključka, da su svi trokuti tog skupa osno simetrični i da je osna simetrija svojstvo jedino jednakokračnih trokuta i nijednih drugih. Ako sada promatramo neki proizvoljni trokut ABC (sl. 1.), dovoljno je da utvrdimo, da li pripada skupu S ili ne pripada, pa da bez ikakvog daljnjeg razmišljanja ili dokazivanja zaključimo, da li je simetričan ili nije simetričan. Uspoređivanjem stranica trokuta ABC sa slike 1. ustanovljujemo, da je $\overline{BC}=\overline{BA}$ (sl. 2.). Stoga je trokut ABC osno simetričan, i pravac BB' mu je os simetrije (sl. 3.).

Analiza znači, da unaprijed pretpostavljamo, da se ono što analiziramo sastoji od više elemenata i sad ih mi tražimo. *Sinteza* pak znači, da raspolažemo sa skupom objekata i svojstava te ih dovodimo u vezu i povezujemo u cjelinu. *Fizičke smjese* i *kemijski spojevi* su skupovi, samo što u prvima dolaze elementi općenito u bilo kojim kombinacijama i u bilo kojim količinskim odnosima, dok su kod drugih i kombinacije i količinski odnosi elemenata određeni njihovim svojstvima.

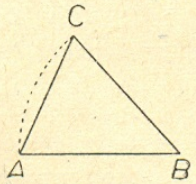
Svaka je *teorija* skup međusobno logički povezanih tvrdnji, koje izlaze iz određenog skupa definicija, hipoteza i aksioma. Svaka je *nauka* skup međusobno povezanih tvrdnji, koje čine određenu cjelinu.

2. *Općenito o pojmu skupa*

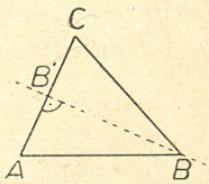
Budući da svaka nauka operira s velikim brojem često vrlo zamršenih pojmova, mora ona te pojmove *odrediti* ili *definirati*. Tako imamo *definicije* sume brojeva, sume vektora, trokuta, simetrale dužine, simetrale kuta, kružnice, logaritma, deri-



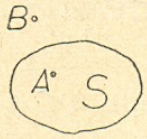
Sl. 1.
Jeli ovaj trokut simetričan?



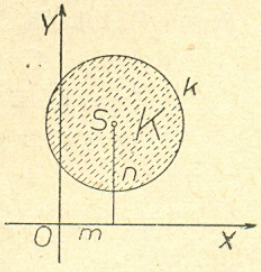
Sl. 2.
Trokut ABC je simetričan jer je $\overline{BC}=\overline{BA}$



Sl. 3.
Pravac BB' je os simetrije trokuta ABC



Sl. 4.
$A \in S$
B non $\in S$



Sl. 5.
S non $\in k$,
ali $S \in K$

vacije, sile, mase, valencije i t. d. No definiranje pojma znači u stvari svođenje tog pojma na jednostavnije, poznatije pojmove. Tako se na primjer definicijom pojam

kuta izvodi iz pojmova zrake i rotacije. (Genetička definicija kuta glasi: Kut nastaje rotacijom zrake oko njezine početne točke). Zato je tim teže definirati neki pojam, što je on poznatiji, jednostavniji. Jer teško je onda naći nešto još poznatije, jednostavnije. Stoga (a i iz drugih razloga, na koje se zasad ne možemo osvrnuti) danas još ne postoji definicija skupa, jer teško je i zamisliti nešto jednostavnije, poznatije, osnovnije. Tâ već mala djeca rade na skupovima (na primjer igračaka). Oni od raznih predmeta prave cjeline ili rastavljaju cjeline na dijelove i t. d.

3. *Relacije* $\in$ *i* $\ni$

Ako neki objekt A pripada skupu S, kažemo da je A *element* skupa S i bilježimo $A \in S$. Ako objekt B ne pripada skupu S, bilježimo B non$\in S$. Ako objekt A pripada skupu S, onda kažemo da skup S *sadrži* element A i pišemo $S \ni A$. Dakle iz $A \in S$ zaključujemo $S \ni A$ i obratno. Isto je tako i relacija S non$\ni B$ ekvivalentna s obrnutom relacijom B non$\in S$ i obratno.

Skupove često označujemo tako, da sve njegove elemente stavljamo u savinute zagrade. Ako na primjer A, B i C čine skup, bilježimo: $\{A, B, C\}$. Slično $\{1, 2, 3, 4\}$ označuje skup, koji se sastoji od elemenata 1, 2, 3 i 4.

Skupove shematski prikazujemo (kao i pojmove u logici) *Eulerovim krugovima*, a njihove elemente točkama. Tako je na primjer $A \in S$ i B non$\in S$ (sl. 4.).

Budući da je pravac p skup točaka, onda $P \in p$ znači, da se P nalazi na pravcu p ili da P leži na pravcu p. $p \ni P$ znači, da pravac p prolazi točkom P. Relacija Q non$\in p$ znači, da je točka Q izvan pravca p, a obrnuta relacija p non$\ni Q$ znači, da pravac p prolazi mimo točke Q.

Ako je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

jednadžba kružnice k, onda vrijedi relacija

$$S(m; n) \text{ non} \in k \text{ (sl. 5.)},$$

ali je

$$S(m; n) \in K,$$

ako simbolom K obilježimo krug omeđen kružnicom k, t. j. ako je

$$K \equiv (x - m)^2 + (y - n)^2 \leqq r^2.$$

4. *Relacije inkluzije* $\subseteq$ *i* $\supseteq$

Svaki skup P, koji se sastoji samo od elemenata skupa S, zove se *dio* ili *podskup* skupa S i bilježi $P \subseteq S$. Stoga obrnuta relacija $S \supseteq P$ znači, da je S *nadskup* skupa P, t. j. da S sadrži bar sve elemente skupa P.

Relacije $\subseteq$ odnosno $\supseteq$ imaju neka važna svojstva, od kojih citiramo dva:

1. Iz $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ izlazi $A = B$.
2. Iz $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ izlazi $A \subseteq C$ (*tranzitivnost* ili *prelaznost* relacije $\subseteq$, sl. 6.).

5. *Neuporedljivi skupovi*

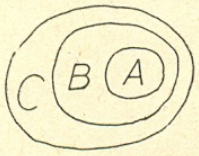
Ako nije $A \subseteq B$ niti $B \subseteq A$ (sl. 7.), skupovi A i B zovu se *neuporedljivi* s obzirom na relaciju $\subseteq$. Tako je na primjer skup učenika nekog razreda neuporedljiv s obzirom na relaciju $\subseteq$ sa skupom točaka pravca.

6. *Relacije* $\subset$ *odnosno* $\supset$

Relacija $P \subset S$, koja se čita P je *pravi dio* skupa S, znači da njegov dio P ne sadrži bar jedan njegov element (sl. 8.). Slično $S \supset P$, što se čita S je *pravi nadskup* od P, znači, da skup S sadrži bar jedan element, koji nije sadržan u njegovom dijelu P.

7. *Oduzimanje skupova*

Ako skupu S oduzmemo dio X (sl. 9.), bilježimo to $S \setminus X$. Preostali dio $Y = S \setminus X$ skupa S zove se *komplement* skupa X *u skupu* S i bilježi $Y = C(X)$. Imamo dakle definiciju: $C(X) = S \setminus X$.

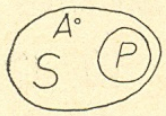


Sl. 6.

Budući da je $A \subset B$ i $B \subset C$ onda je i $A \subseteq C$

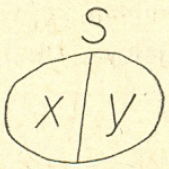
Sl. 7.

Skupovi A i B su neuporedljivi, jer niti je $A \subseteq B$ niti je $B \subset A$



Sl. 8.

P je pravi dio od S, jer $S \ni A$ non $\in P$



Sl. 9.

$Y = S \setminus X$

Vježbe:

1. Da li se značenje termina *komplementne boje* u spektru podudara sa značenjem termina *komplementni skupovi?*

   [Ne podudara se, jer spektar sadrži i druge boje, osim dviju komplementnih].

2. Za kakve skupove S_1 i S_2 vrijedi relacija $S_1 \setminus S_2 = S_2 \setminus S_1$?

   [Za $S_1 = S_2$].

8. *Jednočlani skup*

Ako od skupa S oduzmemo sve elemente osim jednog, preostali dio skupa S zove se *jednočlani skup.* Dakle svaki element x skupa S shvaćen kao skup, dio je skupa S, t. j. iz $x \in S$ izlazi $\{x\} \subset S$. Dakako i obratno iz $\{x\} \subset S$ izlazi $x \in S$.

Svaki objekt možemo smatrati jednočlanim skupom.

Vježba:

Za koje skupove S je $\{x\} \subseteq S$, a za koje $\{x\} \subset S$?

[Relacija $\{x\} \subset S$ vrijedi za jednočlane skupove $\{x\}$.
Relacija $\{x\} \subset S$ vrijedi za skupove, koji sadrže više od jednog elementa x].

9. *Prazan skup*

Ako skupu S oduzmemo sve njegove elemente, dobivamo *prazan skup,* koji bilježimo simbolom v. Prema tome je $v = S \setminus S$. Skup, koji ima bar jedan element, zove se *neprazan* skup.

Upamtit ćemo korisnu *konvenciju* (dogovor), da je prazan skup dio svakog skupa, t. j. $v \subset S$, odnosno da svaki skup S sadrži prazan skup v kao svoj dio, t. j. $S \supseteq v$.

Vježbe:

1. Za koje skupove S je $v \subset S$, odnosno $S \supset v$?

   [Za neprazne skupove S].

2. Što je komplement skupa S u skupu S ?

   [Prazan skup v].

3. Što je komplement skupa v u skupu S ?

   [Skup S].

4. Čemu je jednako $S \setminus v$?

   [$S \setminus v = S$].

10. Partitivni skup

Skup svih dijelova nekog skupa S zove se *partitivni skup* skupa S i bilježi oznakom $P(S)$. Prema konvenciji je $v \in P(S)$ i $S \in P(S)$.

Iz kombinatorike znamo, da izdvajanjem k elemenata iz skupa od n elemenata dobivamo $\binom{n}{k}$ k-članih skupova. To znači, da skup od n elemenata ima $\binom{n}{k}$ k-članih dijelova. Ukupno skup S ima prema tome

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{1}$$

dijelova. (I formula (1) je poznata iz kombinatorike).

Dakle:

Partitivni skup praznog skupa v ima $2^0 = 1$ element: v;

partitivni skup jednočlanog skupa $\{a\}$ ima $2^1 = 2$ elementa: v i $\{a\}$;

partitivni skup dvočlanog skupa $\{a_1, a_2\}$ ima $2^2 = 4$ elementa: v, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$;

partitivni skup tročlanog skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ ima $2^3 = 8$ elemenata: v, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_2\}$; $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$;

i t. d.

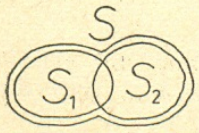
11. Sastavljanje i rastavljanje skupova

Već smo rekli, da i mala djeca sastavljaju i rastavljaju skupove predmeta. Može se slobodno reći, da se velik dio ljudskog rada troši u sastavljanju i rastavljanju raznih bilo konkretnih (fizički, a i umni rad) bilo apstraktnih skupova (umni rad).

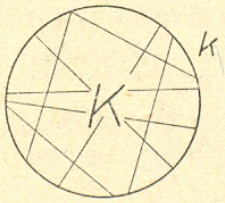
11.1. Unija skupova

Ako od dvaju skupova S_1 i S_2 formiramo nov skup (sl. 10.), tako da je svaki element skupa S *ili* element od S_1 *ili* element od S_2 (ili element i od skupa S_1 i od skupa S_2), onda skup S zovemo *spojem* ili *unijom* skupova S_1 i S_2 i pišemo $S = S_1 \cup S_2$.

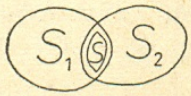
Općenito se definira unija $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ od proizvoljnog broja skupova $S_1, S_2, \ldots$ kao skup svih elemenata koji se nalaze *bar u jednom* od skupova $S_1, S_2, \ldots$ Tako je na primjer krug K unija svih tetiva svoje periferije k (sl. 11.).



Sl. 10.
$S = S_1 \cup S_2$



Sl. 11.
Krug K je unija svih tetiva kružnice k



Sl. 12.
$S = S_1 \cap S_2$

Sl. 13.
S_1 i S_2 su disjunktni skupovi, jer je $S_1 \cap S_2 = v$

Vježbe:

1. Čemu je jednako $S \cup v$?
   $[S \cup v = S]$.
2. Čemu je jednako $S \cup S$?
   $[S \cap S = S]$.

11. 2. Presjek skupova

Ako se skup S sastoji od svih elemenata koji se nalaze *i* u skupu S_1 *i* u skupu S_2 (sl. 12.), tada se skup S *zove zajednički dio* ili *presjek* skupova S_1 *i* S_2 i piše: $S = S_1 \cap S_2$.

Općenito se definira presjek $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots$ od proizvoljnog broja skupova $S_1, S_2, \ldots$ kao skup svih elemenata, koji se nalaze *u svakom* od skupova $S_1, S_2, \ldots$ Tako je na primjer nebeski ekvator presjek nebeskog svoda i ravnine koja prolazi središtem Zemlje i okomita je na svjetskoj osi.

V j e ž b e :

1. Čemu je jednako $S \cap v$?
   [$S \cap v = v$].
2. Čemu je jednako $S \cap S$?
   [$S \cap S = S$].
3. Za kakve skupove S_1 i S_2 je $S_1 \cup S_2 = S_1 \cap S_2$?
   [Za $S_1 = S_2$].
4. Za koje je pravce p_1 i p_2 presjek jednočlan skup?
   [Za ukrštene pravce p_1 i p_2].
5. Da li presjek dviju ravnina može biti jednočlani skup?
   [Ne može, jer ravnine, koje imaju jednu zajedničku točku, imaju i čitav jedan pravac (dakle neizmjerno mnogo točaka) zajednički].

11. 2. 1. Disjunktni skupovi

Ako je presjek dvaju ili više skupova prazan, t. j. ako oni nemaju zajedničkih elemenata, onda se kaže da su to *disjunktni* (odijeljeni) skupovi (sl. 13.). Dakle skupovi $S_1, S_2, \ldots$ su disjunktni, ako je $S_1 \cap S_2 \cap \ldots = v$.

V j e ž b e :

1. Ako su skupovi S_1 i S_2 disjunktni, čemu je jednako $S_1 \setminus S_2$, a čemu $S_2 \setminus S_1$?
   [$S_1 \setminus S_2 = S_1$; $S_2 \setminus S_1 = S_2$].
2. Ako su skupovi S_1 i S_2 disjunktni, oni su neuporedljivi s obzirom na relaciju $\subset$ Zašto? Vrijedi li i obrat?
   [Jer nijedan od skupova S_1 i S_2 nije dio drugog od njih. Ne vrijedi, jer su na primjer i skupovi na slici 12 neuporedljivi, a nisu disjunktni].
3. Kada su pravci p_1 i p_2 disjunktni skupovi?
   [Kada se ne sijeku].
4. Kada su ravnine disjunktni skupovi?
   [Kada se ne sijeku].

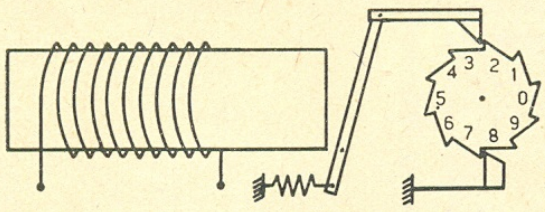
Brojila električnih pulseva

Ing. KRSTO PRELEC, Zagreb

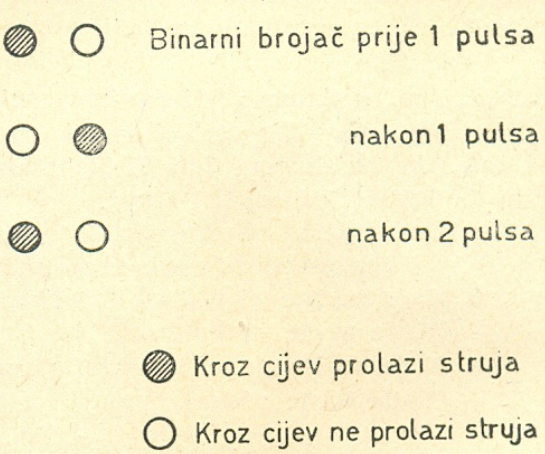
U nuklearnoj fizici se za detekciju zračenja uz ostale metode vrlo često upotrebljavaju brojači, Geiger-Müllerovi, scintilacioni, proporcionalni i drugi. Kada kroz neki takav brojač prođe bilo γ zraka bilo neka čestica, kao na pr. β-čestica, proton, deuteron, α-čestica ili koji drugi produkt nuklearnih reakcija, dobit će se neki električki signal kao znak, da je sam brojač reagirao na zraku ili česticu. No time detekcija još nije sasvim izvršena, jer tako dobiveni električni puls treba ustanoviti i na neki način zabilježiti, registrirati. U tu svrhu služe brojila električnih pulseva, koja registriraju nailazak svakog pulsa iz brojača. Osim u nuklearnoj fizici brojila se upotrebljavaju i u drugim granama nauke i tehnike, u prvom redu kod primjene i rada s radioaktivnim izotopima, a zatim uopće u svim slučajevima, kada je po-

trebno vršiti brojenja brže nego što to sam čovjek može učiniti. Vrlo je zgodna primjena brojila za prebrojavanje broja komada nekog proizvoda ili kod pakiranja većeg broja istovrsnih predmeta (na pr. pilula), jer se čitav postupak vrši automatski. Mjerenje malih vremenskih razmaka može se vršiti također uz pomoć brojila. Vremenski razmak, kojemu treba izmjeriti trajanje, treba obilježiti s dva signala, jednim za početak, a drugim za kraj. Prvim se od ta dva signala može uključiti neki oscilator poznate frekvencije, a drugim isključiti; broj titraja, koje je brojilo registriralo za vrijeme rada oscilatora, proporcionalan je vremenskom intervalu. Točnost mjerenja, koja se može postići ovom metodom, dade se poboljšati do milijuntine sekunde.

Najjednostavniji način brojenja električnih pulseva bio bi, da se na pr. nekim instrumentom ili na koji drugi način pulsevi načine primjetljivima i da se onda broje. No mogućnosti te metode su uistinu vrlo ograničene, jer si svatko može vrlo lako predočiti, kojom brzinom mogu nailaziti pulsevi, a da ih čovjek zapazi i prebroji. Slijedeći korak je primjena običnih mehaničkih brojača, kao što su na pr. telefonski brojači. S takvim se brojačima može registrirati do kojih desetak pulseva u sekundi, ako nailaze u jednakim vremenskim razmacima. Za kvalitet brojača ili uopće brojila nije zapravo toliko važan podatak, koliko se pulseva može registrirati u sekundi, već kako blizu (vremenski) mogu doći dva pulsa, a da ih brojač registrira kao dva, a ne da onaj drugi jednostavno »proguta«. Minimalni razmak između dva uzastopna pulsa, koje uređaj odvojeno registrira, naziva se vrijeme razlučivanja, jer nam taj podatak kazuje, da li će pulsevi kod registriranja biti razlučeni ili registrirani kao jedan jedini. Zato bi za telefonski brojač bilo ispravnije reći, da mu je vrijeme razlučivanja 0,1 sekunde, nego, da mu je brzina brojenja 10 pulseva u sekundi. Ako naime na brojač dođu svake sekunde samo dva pulsa, ali u razmaku tako kratkom, da brojač nakon prvog još nije spreman za primanje novog pulsa, drugi će puls proći nezapažen, makar je prosječan broj samo dva u sekundi. Konstrukcija telefonskog brojača prikazana je na sl. 1. To je običan elektromagnet s kotvom, koja pomoću dva zupčasta nastavka pokreće sistem kotačića (obično ih ima 4 ili 5), na kojima su označene brojke od 0 do 9. Svaki put, kad kroz namotaj elektromagneta proteče struja, odnosno kratak strujni udarac ili puls, bit će privučena kotva i prvi kotačić će se okrenuti za 1/10 okreta. Nakon svakog punog okreta prvog kotačića okrenut će se drugi za 1/10 okreta i tako to ide dalje. Na prvom kotačiću će se prema tome registrirati svaki puls, na drugom svaki deseti, na trećem svaki stoti i t. d., pa ćemo na prvom očitovati jedinice, na drugom desetice, na trećem stotice i tako redom dalje, od ukupnog broja pulseva koji su prošli kroz elektromagnet. Da bi se na telefonskom brojaču mogao registrirati puls potrebno je neko vrijeme, jer kotva mora biti najprije privučena, a zatim otpuštena



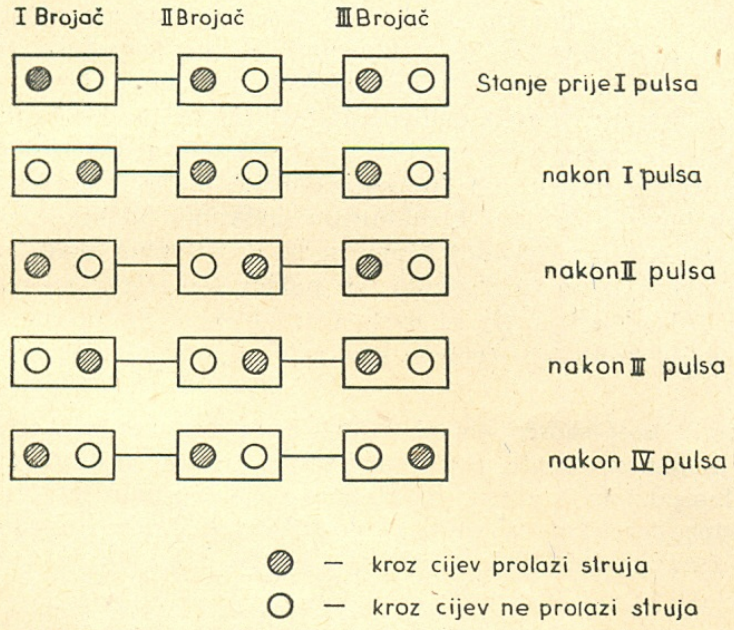
Sl. 1.



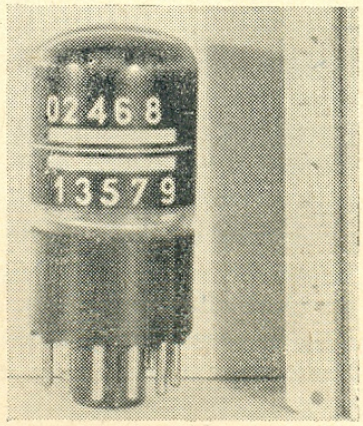
Sl. 2.

i tek je onda brojač spreman da primi novi puls. Upravo ovo pokretanje mehaničkih elemenata predstavlja zapreku za smanjenje vremena razlučivanja nekog brojača. Posebno izvedenim konstrukcijama može se kod mehaničkih brojača tromost pokretnih dijelova toliko smanjiti, da je moguće registriranje pulsa, koji nailaze u razmacima čak manjim od stotinke sekunde, ali to već predstavlja granicu. Međutim zahtjevi koji se danas postavljaju na brojila, su mnogo veći, jer je nekada potrebno registrirati i deset milijuna pulseva u sekundi, a za takve pothvate su mehanički brojači nesposobni.

Problem je bio riješen upotrebom elektronskih cijevi, gdje su pokretni dijelovi elektroni, a njihova je tromost uistinu jako malena (naponom od 1 V mogu se elektroni ubrzati na brzinu od oko 600 km u sekundi). U elektronskim brojilima električnih pulseva upotrebljavaju se bilo obične cijevi, triode ili pentode, bilo posebno konstruirane cijevi, koje služe samo u brojilima. Sklopovi za brojenje, u kojima rade obične cijevi, razlikuju se od onih sklopova, koji služe na pr. za detekciju ili pojačanje u nekom radioaparatu. Od sklopa za pojačanje traži se, da neki signal, koji se dovodi na rešetku cijevi, bude vjerno pojačan. Kod sklopova za brojenje su zahtjevi posve drugačiji. Ovdje nema potrebe za pojačanjem, jer se pretpostavlja da su signali već dovoljno veliki, kad dođu do sklopa za brojenje, nego se zahtijeva sposobnost



Sl. 3.

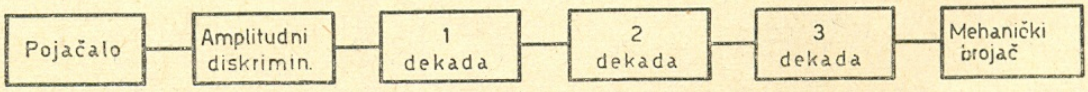


Sl. 4.

sklopa da registrira dolazak nekog pulsa i da to zapamti sve do nailaska slijedećeg pulsa. Elektronske cijevi u sklopovima za brojenje rade u pomalo neobičnim uvjetima, jer najčešće je ili velikim negativnim naponom na rešetci potpuno spriječen prolaz anodne struje ili rešetka ima isti napon kao i katoda, pa kroz nju prolazi vrlo jaka struja. Najjednostavniji takav sklop za brojenje je t. zv. binarni brojač (neki ga nazivaju i flip-flop). On se sastoji od dvije triode ili dvije pentode. Sklop je načinjen tako, da kroz prvu cijev struja prolazi, a kroz drugu ne, ili obratno, a nije moguće da budu ili obje cijevi otvorene ili zatvorene. U tom se slučaju za sklop kaže, da ima dva stabilna stanja; u prvom od njih neka struja prolazi kroz prvu cijev, a kroz drugu ne, dok u drugom stabilnom stanju struja prolazi kroz drugu cijev, a kroz prvu ne. Sklop će stajati u jednom od ova dva moguća stabilna stanja tako dugo dok ga se pusti na miru, no ako se dovede neki prikladni puls, on će ga iz prvobitnog stanja prebaciti u ono drugo moguće stabilno stanje (sl. 2.).

Ovo prebacivanje se može lako ustanoviti; obično se u krug doda jedna mala tinjalica, koja svojim paljenjem pokazuje da je sklop iz prvobitnog prebačen u drugo stabilno stanje. Slijedeći puls vratit će sklop u ono prvobitno stanje u kojem se je nalazio prije dolaska prvog pulsa. Ako želimo takav sklop upotrebiti za brojenje, moći ćemo s njim ustanoviti samo da je došao prvi puls, dok registracija većeg broja nije moguća, jer već drugi puls vraća sklop u prvobitno stanje. No ove vrlo skromne mogućnosti binarnih brojača mogu se poboljšati tako, da se spoji nekoliko njih jedan za drugim. Na sl. 3. prikazana su tri binarna brojača spojena jedan za drugim. Prije početka brojenja neka kroz sve lijeve cijevi prolazi struja. Prvi će puls prouzrokovati prebacivanje prvog binarnog brojača iz jednog stabilnog stanja u drugo, drugi puls će prvi brojač vratiti u prvobitno stanje, ali pri tome šalje puls za prebacivanje drugog brojača. Prema tome će drugi brojač reagirati tek na drugi puls. Vrlo lako se može vidjeti, da bi treći brojač reagirao na četvrti puls, četvrti brojač na osmi itd., općenito bi n-ti brojač reagirao na 2^{n-1} puls. Registriranje pomoću sistema binarnih brojača nije prema tome dekadno, već binarno, jer upaljena tinjalica prvog brojača pokazuje, da je došao 1 puls, tinjalica drugog brojača da su došla 2 pulsa, tinjalica trećeg brojača da su došla 4 pulsa i t. d. Brojčane vrijednosti elemenata ovog sistema su 1, 2, 4, 8 . . ., a njihovim kombinacijama se može prikazati bilo koji cijeli pozitivni broj, samo je potrebno uzeti dovoljan broj elemenata (na pr. broj 21 bi se mogao prikazati kao 1+4+16, t. j. nakon 21-vog pulsa bile bi upaljene tinjalice u prvom, trećem i petom brojaču). Binarni brojači omogućuju najveće brzine brojenja, jer im se vrijeme razlučivanja može učiniti kraćim od 10^{-7} sekundi. Nezgodna strana im je što je za očitavanje potrebno uvijek zbrajati potencije od 2. No i tome je doskočeno, pa se četiri ovakva binarna brojača kombiniraju dodatnim međusobnim vezama u jedan dekadni brojač. Kad na dekadni brojač dođe deseti puls, onda se sklop vraća u početno stanje (inače bi se to dogodilo tek nakon šesnaestog pulsa). I očitavanje je u tom slučaju jednostavnije, jer se može vršiti pomoću 10 tinjalica, označenih brojevima od 0 do 9, od kojih istovremeno gori samo jedna i tako pokazuje, koliko je pulseva stiglo.

Osim sklopova za brojenje, koji sadrže obične cijevi, konstruirano je i više tipova dekadnih cijevi, koje mogu zamijeniti prije spomenutu dekadu sastavljenu od četiri binarna brojača. Jedna od takvih cijevi, d e k a t r o n, je zapravo tinjalica, koja ima međutim umjesto jedne, deset katoda, zatim 20 pomoćnih elektroda i anodu. U dekatronu postoji tinjavi izboj između jedne katode i anode, tako da se vidi

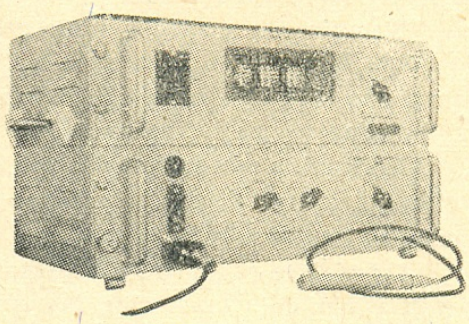


Sl. 5.

tinjava svjetlost oko te katode. Registriranje pojedinih pulseva vrši se tako da se tinjavi izboj prebacuje s jedne katode na drugu, što se lijepo vidi, jer tako prelazi i tinjava svjetlost. Vrijeme razlučivanja ovakvih cijevi je duže nego kod binarnih brojača, te se kreće od desettisućinke do stotisućinke sekunde, što znači da je barem 100 puta dulje nego kod binarnih brojača. Dekatroni se zato upotrebljavaju u onim slučajevima, gdje se ne zahtijevaju naročito kratka vremena razlučivanja (na pr. kod rada s Geiger-Müllerovim brojačima). Osim dekatrona dosta se upotrebljavaju i cijevi tipa E1T (sl. 4.). To su male katodne cijevi, kod kojih se registriranje pulseva vrši tako da se snop elektrona, koji izlaze iz katode i udaraju o fluorescentni zastor, pomiče uvijek za isti kut. Time se naravno pomiče i svjetla mrlja na zastoru, pa se

tako može iz položaja mrlje na zastoru odrediti koliko je pulseva stiglo. Cijev je konstruirana tako, da deseti puls vraća snop u početni krajnji položaj, a ujedno pomiče snop u slijedećoj cijevi iz početnog, nultog položaja, u slijedeći položaj, koji odgovara prvoj desetici. Ove cijevi su mnogo brže od dekatrona, te se nalaze negdje u sredini između njih i binarnih brojača. Prednost posebno konstruiranih dekadnih cijevi pred binarnim brojačima je mnogo jednostavnija konstrukcija brojila, pa su one počele u posljednje vrijeme u priličnoj mjeri potiskivati brojila sastavljena od običnih cijevi.

Kompletno brojilo sadrži osim sklopova za brojenje i neke druge sklopove (sl. 5.). Signali, odnosno pulsevi, dolaze najprije u pojačalo, koje ih pojača, jer neki detektori daju vrlo male pulseve. Nakon pojačala moraju signali proći kroz t. zv. amplitudni diskriminator, kojim se odabiru od svih pulseva samo oni, koji imaju amplitudu veću od neke minimalne vrijednosti. Time se spriječava registriranje raznih nepoželjnih pulseva. Iza diskriminatora dolazi bilo niz binarnih brojača za registriranje u binarnom sistemu bilo nekoliko dekada (3—5) za registriranje u dekadnom sistemu. Od svih stupnjeva za brojenje najviše je opterećen prvi, jer se on mora prebacivati kod svakog pulsa. Kasniji stupnjevi su sve manje i manje opterećeni, pa tako na pr. četvrta dekada registrira samo svaki tisući puls. Zato nema smisla stavljati u brojilo prevelik broj elektronskih stupnjeva za brojenje, jer se može dogoditi da mogućnosti ovih posljednjih nisu iskorištene. Obično je dovoljno 3—5 dekada, nakon kojih dolazi mehanički brojač. Na sl. 6. prikazano je brojilo sa cijevima E1T, konstruirano u Institutu »Ruđer Bošković«, Zagreb.



Sl. 6.

O jednoj univerzalnoj formuli za volumene tijela

MILENKO SEVDIĆ, Zagreb

Iz geometrije nam je poznato, kako za izračunavanje volumena različitih tijela postoje različite formule. Već u nižim razredima se upoznaju neke od tih formula. Sigurno su Vam poznate formule za izračunavanje volumena svih vrsta prizmi, piramida, valjaka i stožaca, te napokon za volumen kugle. Uzmemo li još i krnju piramidu i krnji stožac, onda je bilo potrebno znati sedam formula, da bi se mogao izračunati volumen ovih sedam tijela. Vjerojatno je, da nikada niste došli na to da postavite pitanje: *ne postoji li možda jedna opća formula, koja bi obuhvatila svih ovih sedam tijela?* Uvjerit ćemo se da zaista takva formula postoji. Ona nosi naziv *Simpsonova formula.*

Navest ćemo ponajprije tu formulu kao gotov rezultat i pokazati, kako je ona stvarno jedna univerzalna formula za izračunavanje svih navedenih sedam tijela, a što je interesantno ta formula ista po obliku, ali samo s različitim značenjem veličina, može se protegnuti i na izračunavanje površine nekih likova. Pokazat ćemo da je to moguće u slučaju paralelograma, trapeza i trokuta. Istom na koncu ću izvesti tu formulu kao formulu za volumen t. zv. *prizmatoida.* To je izvođenje nešto kompliciranije, ali ne opet takvo, da bi prelazilo snagu jednog srednjoškolca i da ga on s malo pažnje ne bi mogao slijediti. To je upravo razlog zašto će se najprije govori o primjeni, a onda istom o izvođenju. Primjena je vrlo jednostavna, a glo-

maznost izvođenja te formule odmah na samom početku možda bi mogla odbiti mnoge i prisiliti ih da odustanu od daljnjeg čitanja. Ovako je vjerojatnije, da će oni, koji su zainteresirani univerzalnošću formule, onda rado htjeti saznati i njeno izvođenje.

Evo te čarobne formule, koja je jedinstvena svojom univerzalnošću. Ona glasi:

$$V = \frac{h}{6}(D + 4M + G) \tag{1}$$

Ovdje treba da kažemo što znače pojedine veličine u toj formuli. Kao i obično h je visina, D je površina donje baze, M je površina srednjeg presjeka tijela, a G je površina gornje baze.

Kao što vidimo treba samo uvesti pojam *srednjeg presjeka* tijela i to je sve što je novo. Ništa komplicirano, a tako sveobuhvatno. Taj srednji presjek tijela dobijemo, ako bilo koje od naših sedam tijela siječemo ravninom, koja je položena sredinom visine paralelno bazama.

Kod nekih od ovih naših sedam tijela taj srednji presjek možemo odmah znati koliki je, a kod drugih se opet može vrlo lako odrediti i to na osnovu vrlo dobro poznatih poučaka iz planimetrije i stereometrije.

Da vidimo sada, kako se formula (1) može primijeniti na svako od sedam navedenih tijela. Mi ćemo zbog istovrsnosti postupka na osnovu oblika tijela ta tijela podijeliti u 4 grupe, i to:

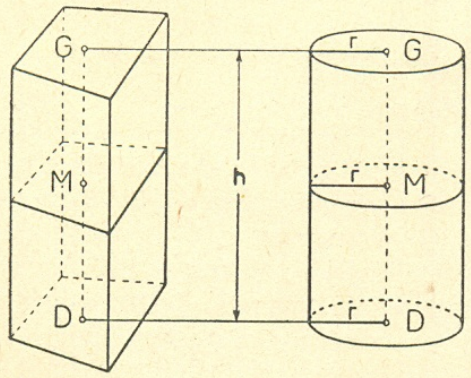
I. grupa: *prizma* i *valjak*
II. grupa: *piramida* i *stožac*
III. grupa: *krnja piramida* i *krnji stožac*
IV. grupa: *kugla.*

Pristupimo poslu!

I. grupa: *Prizma* i *valjak.* (Sl. 1.)

Na osnovu slike možemo odmah utvrditi ovo: donja baza D, gornja baza G, ali i srednji presjek M jednaki su međusobno, dakle je

$$D = M = G.$$



Sl. 1.

Prema tome primjenom formule (1) imamo:

$$V = \frac{h}{6}(D + 4D + D) = \frac{h}{6} \cdot 6D = D \cdot h.$$

Ako D označimo kao obično sa B imamo

$$V = B \cdot h$$

a to nam je poznata formula. Treba sada već prema tome kakova je prizma izračunati B, pomnožiti s visinom h i dobiti volumen.

Za valjak, kao što znamo, treba staviti $B = r^2\pi$, gdje je r polumjer baze.

II. grupa: *Piramida* i *stožac.* (Sl. 2.)

Ponajprije da vidimo kako ćemo dobiti srednji presjek. Srednji presjek piramide je sličan lik s bazom. Kako su pojedine stranice tog lika, koji se dobije za srednji presjek, u stvari srednjice trokuta, to su one jednake polovini odgovarajuće stranice osnovnog trokuta. Prema tome, ako je površina donje baze D, onda, kako su dužinski elementi lika M dva puta manji (t. j. faktor proporcionalnosti ili sličnosti je $\frac{1}{2}$), površina M je manja $(\frac{1}{2})^2$ puta, t. j.

$$M = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot D = \frac{D}{4}.$$

Posve isto dobijemo i za stožac. Ako je polumjer baze R, onda je polumjer srednjeg presjeka $r = \frac{R}{2}$, pa je

$$D = R^2\pi, \text{ a } M = \frac{R^2\pi}{4}.$$

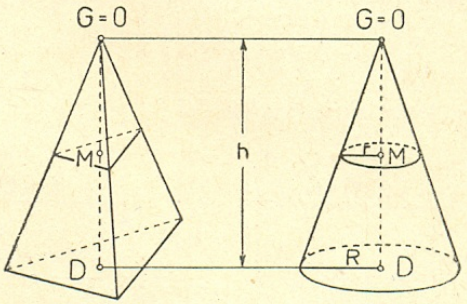
Važno je sada utvrditi, da se kod ova dva tijela gornja baza G reducira na točku. Prema tome je $G = 0$.

Znači za ova dva tijela imamo

$$V = \frac{h}{6}(D + 4\frac{D}{4} + 0) = \frac{h}{6}(D + D) = \frac{h}{6} \cdot 2D = \frac{D \cdot h}{3}.$$

A to nam je poznata formula za volumen ovih dvaju tijela. Treba još napomenuti, da je za stožac $D = R^2\pi$.

III. grupa: *Krnja piramida* i *krnji stožac.* (Sl. 3.)



Sl. 2

Za *krnji stožac* imamo:

$$r_s = \frac{R + r}{2},$$

pa je

$$M = r_s^2\pi = \left(\frac{R + r}{2}\right)^2\pi = \frac{\pi}{4}(R^2 + 2Rr + r^2),$$

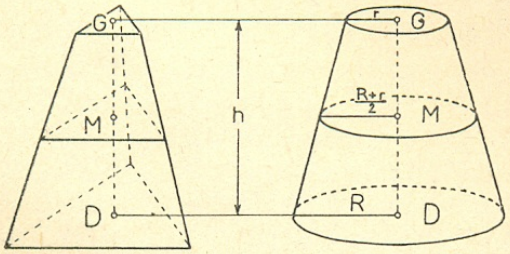
dok je:

$$D = R^2\pi, \quad G = r^2\pi.$$

Prema tome je:

$$V = \frac{h}{6} \cdot [R^2\pi + 4 \cdot \frac{\pi}{4}(R^2 + 2Rr + r^2) + r^2\pi] = \frac{\pi h}{6}(R^2 + R^2 + 2Rr + r^2 + r^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{6}(2R^2 + 2Rr + 2r^2) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2),$$



Sl. 3.

a to je upravo formula za volumen krnjeg stošca.

Za *krnju piramidu* imamo donju bazu D i gornju bazu G, dok se M, jer se nalazi na sredini, nađe iz proporcije

$$D : M = M : G.$$

ili

$$M^2 = D \cdot G$$

t. j.

$$M = \sqrt{D \cdot G}.$$

Uvrstimo li ovo u formulu (1) dobijemo

$$V = \frac{h}{6}(D + \sqrt{DG} + G).$$

Dakle poznata formula za volumen krnje piramide.

Konačno još ostaje:

IV. grupa: *Kugla.* (Sl. 4.)

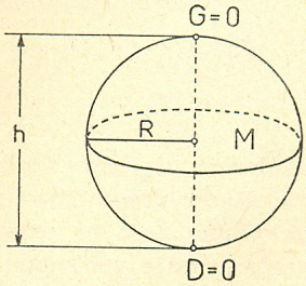
Iz slike vidimo da je

$$h = 2r$$

dok je

$$D = 0, \quad G = 0, \quad M = r^2\pi$$

pa je primjenom formule (1):



Sl. 4.

$$V = \frac{h}{6}(0 + 4r^2\pi + 0) = \frac{2r}{6} \cdot 4r^2\pi = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Tako smo pokazali, da se iz Simpsonove formule (1) mogu izvesti formule za volumen svih naših običnih tijela.

Ostaje nam još da pokažemo interesantnu činjenicu, koju smo naprijed spomenuli, naime, da se Simpsonova formula može primijeniti i na izračunavanje površine nekih likova u ravnini, i to: paralelograma, trapeza i trokuta. Pri tome ćemo kao i dosada pod h razumijevati visinu lika, pod D dužinu donje baze lika, pod M dužinu srednjice (t. j. dužinu koju dobijemo, ako lik presiječemo pravcem kroz sredinu visine paralelno bazi), pod G dužinu gornje baze.

Tako ćemo imati:

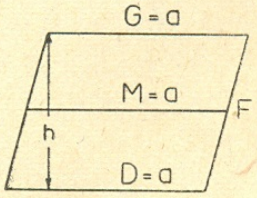
1. Za *paralelogram* (sl. 5.)

$$D = M = G = a$$

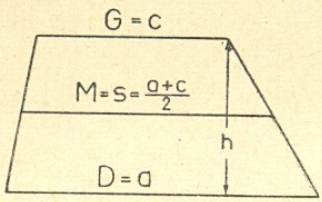
Stoga je

$$P = \frac{h}{6}(a + 4a + a) = a \cdot h$$

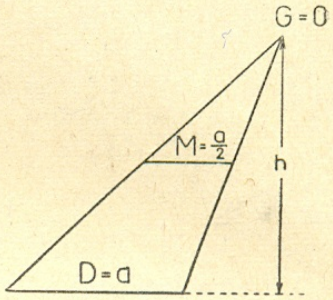
t. j. baza puta visina.



Sl. 5.



Sl. 6.



Sl. 7.

2. Za *trapez* (sl. 6.) je kao što znamo srednjica jednaka poluzbroju paralelnih stranica, t. j.

$$M = \frac{D + G}{2}$$

ili u običnim oznakama

$$M = s,\ D = a,\ G = c,\ s = \frac{a + c}{2}.$$

Prema tome je

$$P = \frac{h}{6}(a + 4 \cdot \frac{a + c}{2} + c) = \frac{h}{6}(3a + 3c) =$$

$$= \frac{h}{2}(a + c) = h \cdot \frac{a + c}{2}$$

t. j. visina puta poluzbroj paralelnih stranica.

3. Konačno nam još preostaje *trokut.* (Sl. 7.)

Kako je $G = 0$, $M = \frac{D}{2}$, a uzmemo li da je $D = a$, imamo:

$$P = \frac{h}{6}(D + 4 \cdot \frac{D}{2} + 0) = \frac{h}{6}(a + 2a) = \frac{a \cdot h}{2}.$$

t. j. baza puta visina kroz dva.

Kada promotrimo sve ovo naprijed izvedeno, vidimo da je zaista potpuno opravdano, kad se kaže, da je Simpsonova formula jedna *univerzalna* formula za izračunavanje volumena tijela.

(Svršit će se)

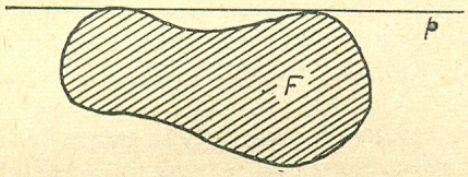
Konveksne figure

KREŠO HORVATIĆ, Zagreb

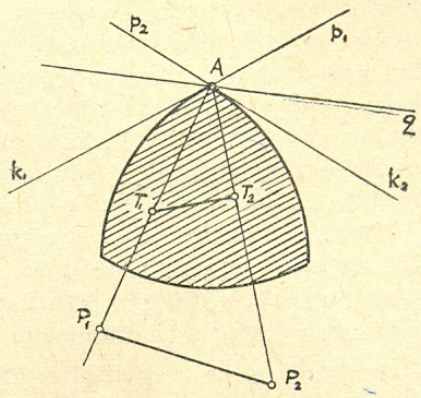
(Svršetak)

III.

Svaki pravac dijeli ravninu u kojoj leži u dvije poluravnine. Reći ćemo, da je pravac p potporni pravac neke figure F, ako s rubom te figure ima zajedničkih točaka i cijela figura F leži u jednoj od poluravnina određenih pravcem p. Općenito, dakako, ne će u svakoj rubnoj točki figure postojati potporni pravac (Sl. 10). Pokazat ćemo međutim, da svakom točkom ruba konveksne figure prolazi uvijek bar jedan potporni pravac. Neka je dakle F konveksna figura, a A bilo koja točka njezinog ruba. Spojit ćemo zrakama točku A sa svim ostalim točkama figure F. Sve te zrake zajedno ispunjaju neki kut $\sphericalangle(k_1, k_2)$, u kojem je sadržana promatrana figura F[3]. Taj kut nije veći od π. Ako su naime P_1 i P_2 bilo koje dvije točke koje pripadaju kutu, onda na spojnicama $\overline{P_1A}$ i $\overline{P_2A}$ sigurno postoje točke T_1 odnosno T_2, koje



Sl. 10.



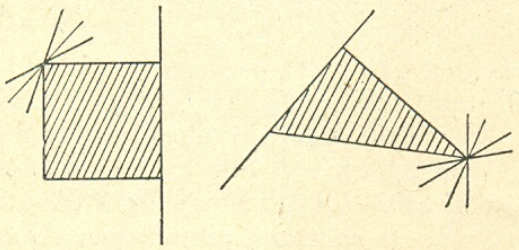
Sl. 11.

pripadaju figuri F (Sl. 11). Budući da je figura konveksna, pripada joj onda i cijeli segment T_1T_2, a time taj segment pripada i kutu. Odatle pak slijedi; da i čitav segment P_1P_2 pripada kutu, što znači da kut ne premašuje π. Zato će čitav kut biti u jednoj od poluravnina određenih pravcem p_1, na kojem leži jedan od krakova kuta, na primjer k_1. No, u toj će poluravnini ležati i čitava figura F, jer je ona sadržana u kutu. Kako osim toga pravac p_1 ima s figurom zajedničku točku A, to je taj pravac potporni pravac figure F u njezinoj rubnoj točki A. Time je dokaz proveden. Analogno bi međutim utvrdili, da je i pravac p_2, na kojem leži krak k_2 kuta, također potporni pravac figure F u točki A. Jasno je nadalje, da su potporni pravci figure u točki A i svi pravci q unutar suplementa kuta $\sphericalangle(k_1, k_2)$, pa bi se moglo pomisliti, da u svakoj rubnoj točki postoji čak beskonačno mnogo potpornih pravaca. Ali ako je kut $\sphericalangle(k_1, k_2)$ ispružen, kako će to najčešće i biti, pravci p_1 i p_2 će pasti zajedno, pa će u tom slučaju u točki A postojati samo jedan potporni pravac. Postojanje potpornog pravca u svakoj rubnoj točki je karakteristično svojstvo za konveksne figure, pa može poslužiti i kao definicija konveksne figure.

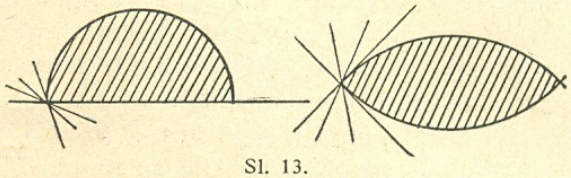
Potporni pravac konveksne figure je u izvjesnom smislu poopćenje tangente. Ako naime u nekoj točki ruba konveksne figure postoji tangenta, onda je ta tangenta sigurno potporni pravac figure. Ako potporni pravac ima s rubom figure samo

[3] Ukoliko kutu ne bi pripadali krakovi, pridružit ćemo mu i te krakove k_1 i k_2.

jednu točku zajedničku, onda je to regularni potporni pravac figure. Tako su na primjer sve tangente kruga i elipse regularni potporni pravci tih figura. Kada, međutim, potporni pravac ima s rubom figure više zajedničkih točaka, to je tada singularni potporni pravac figure. Na primjer takovi su pravci stranice kvadrata ili trokuta i uopće stranice svakog konveksnog mnogokuta, dijametar polukruga (Sl. 12). Nadalje, ako nekom rubnom točkom figure prolazi samo jedan potporni pravac, ta



Sl. 12.

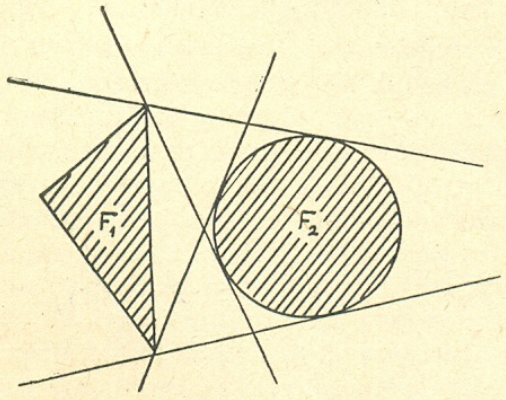


Sl. 13.

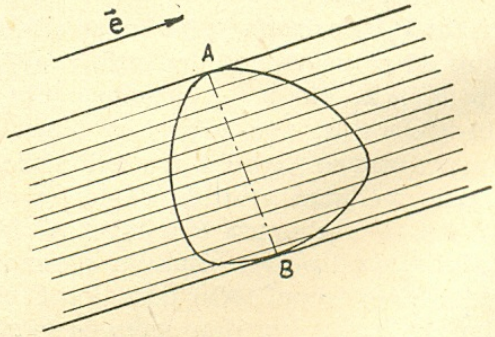
se točka zove regularna ili obična točka ruba, ako pak rubnom točkom prolazi više potpornih pravaca, ona se zove singularna ili ugaona točka ruba. Sve točke kružnice ili elipse su regularne, vrhovi kvadrata ili trokuta su singularne točke, dok su ostale točke njihovog ruba regularne, krajevi dijametra kod polukruga, pa šiljci kod konveksne figure, koja je nastala spajanjem dvaju jednakih kružnih lukova su primjeri singularnih točaka (Sl. 13). Konveksna figura, kojoj je svaka rubna točka regularna i svaki potporni pravac regularan, zove se oval. Katkada se ovalom naziva i konveksna krivulja, koja je rub ovala-figure.

Može se pokazati, da dvije konveksne figure bez zajedničkih točaka imaju točno četiri potporna pravca zajednička. Dva od njih razdvajaju figure, dok ih preostala dva ne razdvajaju (Sl. 14). Ako figure imaju zajednički dio, broj zajedničkih potpornih pravaca varira od beskonačno do nule.

Izvjesni smjer u ravnini možemo karakterizirati na primjer vektorom. Neka je u ravnini konveksne figure F zadan neki smjer $\vec{e}$. Povući ćemo svakom točkom figure F pravac paralelan danom smjeru $\vec{e}$. Skup svih tih paralelnih pravaca tvori



Sl. 14.



Sl. 15.

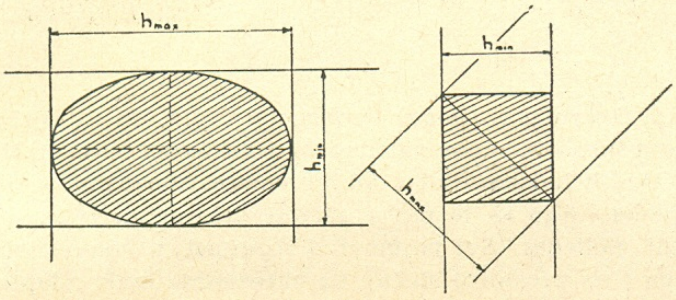
jednu prugu u ravnini, koja sadrži figuru F (Sl. 15). Jasno je, da će pravci, koji omeđuju prugu, biti potporni pravci figure F. Svaka, dakle, konveksna figura ima uvijek dva potporna pravca, paralelna nekom danom smjeru.[4] Dvije rubne točke sa

4 Ova se tvrdnja može dakako i strože dokazati.

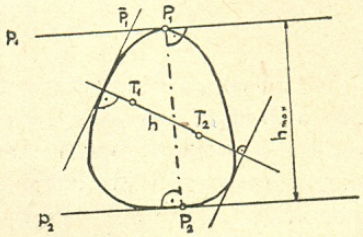
svojstvom, da svakom od njih prolazi jedan od njih prolazi jedan od para paralelnih potpornih pravaca figure, čine par dijametralnih ili suprotnih točaka figure. Spojnica dijametralnih točaka zove se dijametar figure. Naziv je u skladu sa već poznatim pojmom dijametra kod kružnice i elipse. Geometrijsko mjesto polovišta dijametara neke figure naziva se srednjom krivuljom te figure. Srednja krivulja ima svojstvo, da je svaka njezina tangenta paralelna potpornim pravcima, kojima pripada dijametar, na kojem je diralište.

Pod širinom h konveksne figure u nekom smjeru razumijevat ćemo udaljenost para potpornih pravaca paralelnih s tim smjerom. Za svaku konveksnu figuru postoji smjer maksimalne i smjer minimalne širine. Tako se na primjer kod elipse smjer maksimalne širine podudara sa smjerom male osi, a smjer minimalne širine sa smjerom velike osi. Kod kvadrata je smjer maksimalne širine okomit na njegovu dijagonalu, dok se smjer minimalne širine podudara sa smjerom stranice kvadrata (Sl. 16).

Neka su p_1 i p_2 potporni pravci, koji su paralelni sa smjerom maksimalne širine figure, a P_1 i P_2 odgovarajući par dijametralnih točaka. Tada je dijametar $\overline{P_1P_2}$



Sl. 16.



Sl. 17.

okomit na potporne pravce p_1 i p_2 i jednak maksimalnoj širini figure h_{maks}. Ako su naime T_1 i T_2 bilo koje dvije točke figure, to dužina $\overline{T_1T_2}$ nije veća od širine h figure u smjeru okomitom na T_1T_2, a time sigurno ni od maksimalne širine h_{maks} (Sl. 17):

$$\overline{T_1T_2} \leqq h \leqq h_{maks}.$$

Znači da je specijalno i

$$\overline{P_1P_2} \leqq h_{maks}.$$

U drugu ruku, jer P_1 leži na pravcu p_1, a P_2 na p_2, dužina $\overline{P_1P_2}$ ne može biti manja od udaljenosti tih pravaca, t. j.

$$\overline{P_1P_2} \geqq h_{maks}.$$

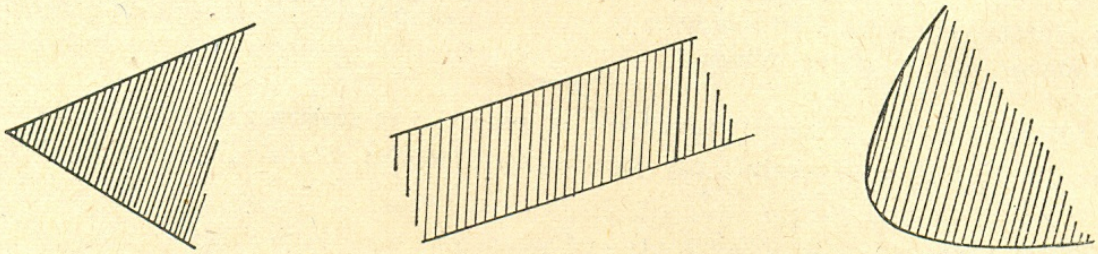
Zaključujemo dakle, da je

$$\overline{P_1P_2} = h_{maks}.$$

a to je moguće jedino na taj način, da dijametar $\overline{P_1P_2}$ bude okomit na potporne pravce p_1 i p_2. Slično bi se moglo dokazati, da je dijametar, koji odgovara paru potpornih pravaca, paralelnih sa smjerom minimalne širine figure, također okomit na potporne pravce i time jednak minimalnoj širini figure h_{min}. Iz navedenog neposredno slijedi i to, da su potporni pravci u smjeru maksimalne i minimalne širine figure uvijek regularni. Jer, kad bi, na primjer na pravcu p_1 uz P_1 (sl. 17) postojala još jedna rubna točka figure P_1, morala bi biti prema dokazanom, oba dijametra $\overline{P_1P_2}$ i $\overline{P_1P_2}$ okomita na p_1, što je nemoguće.

IV.

Spomenimo na kraju ,da ćemo pod konveksnim figurama u širem smislu razumijevati i beskonačne konveksne figure. Za razliku od promatranih, konačnih konveksnih figura, beskonačne figure su one, koje nije moguće obuhvatiti kružnicom konačnog radiusa. Većina pojmova i svojstava s kojim smo se upoznali kod konačnih konveksnih figura prenose se i na beskonačne. Beskonačne konveksne figure su na primjer kut, koji je manji od π, pruga omeđena sa dva paralelna pravca, zatim dio ravnine omeđen parabolom ili jednom granom hiperbole (Sl. 18), poluravnina i konačno cijela ravnina. Isto tako, idući u drugu krajnost, specijalnim konveksnim figurama smatrat ćemo pravac, zraku, dužinu, pa čak i jednu točku.



Sl. 18.

U prostoru ulogu konveksnih figura preuzimaju konveksna tijela. To su tijela,[5] kako slijedi iz samog pojma konveksnosti, koja zajedno sa bilo koje dvije točke sadrže i čitavu pravocrtnu spojnicu tih točaka. Plohu, koja omeđuje konveksno tijelo zovemo zatvorena konveksna ploha. Ako se ta ploha sastoji isključivo iz ravnih mnogokuta, dobivamo konveksni poliedar. Svi pojmovi i rezultati o konveksnim figurama prenose se bez daljnjega i na prostorni slučaj, uz eventualne male adaptacije, koje zahtijeva povećana dimenzija operacionog prostora. Međutim, konveksna tijela imaju još čitav niz interesantnih svojstava, koja ne nailazimo kod figura u ravnini. To je razumljivo, jer su konveksne figure samo specijalni slučaj konveksnih tijela.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Školski otpornik

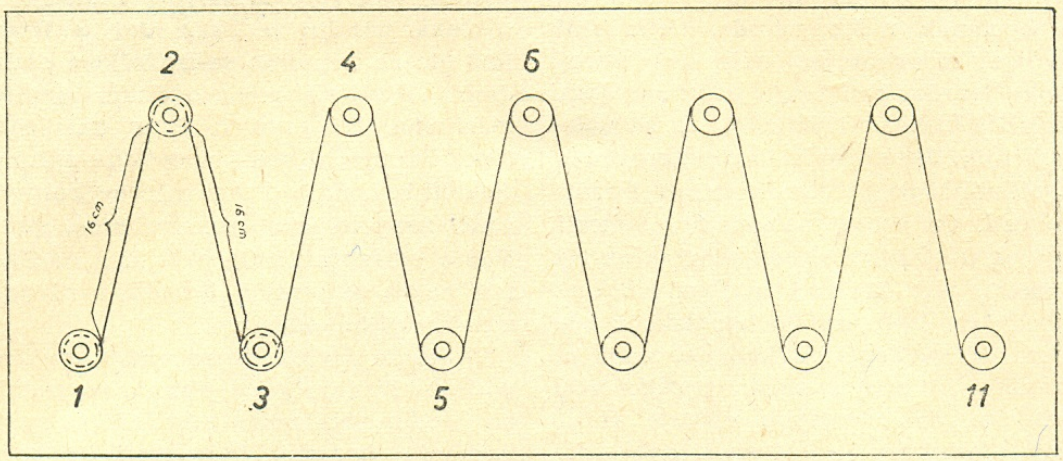
U nastavi fizike često nam je potreban otpornik kojemu možemo mijenjati otpor tako, da znademo koliki je otpor, što ga u određenom slučaju upotrebljavamo. Znademo da to na pr. kod kliznog otpornika nije slučaj. Kod otpornika na čepove to možemo. On je pogodan za laboratorijski rad, no za demonstracione eksperimente nije dovoljno pregledan. Njega je i teško nabaviti. Otpornik sa ručkom je zgodan za demonstracione eksperimente.

Prikazat ćemo ovdje jedan jednostavan uređaj koji može nadomjestiti otpornik s ručkom. Udešen je tako, da može poslužiti za kvantitativna provjeravanja i izvođenja mnogih osnovnih svojstava istosmjerne struje, koja se često izvode samo kvalitativno.

Uređaj je vrlo jednostavan i može se izraditi u svakoj školskoj radionici s malo truda. Kao materijal treba ploča lesonita veličine po prilici 70×35 cm, 11 priključ-

[5] Strogo definirano, geometrijsko tijelo je skup točaka trodimenzionalnog euklidskog prostora, koji je omeđen, zatvoren i suvisao (nazivi kao u knjizi Đ. Kurepa: Teorija skupova, Zagreb, 1951).

nica s rupicom za bananske utikače i komad neke otporne žice velikog specifičnog otpora bez izolacije. Ovdje opisani otpornik imade ukupni otpor 20 Ω, a sastavljen je od 10 otpora od 2 Ω serijski spojenih. Njegov izgled vidi se na slici 1. Kružići su priključnice. Ako hoćemo u krug struje ukopčati otpor od 20 Ω, onda treba polove izvora struje uključiti u priključnice 1 i 11; ako trebamo otpor od 10 Ω, uključit ćemo ih u priključnice 1 i 6; za 4 Ω u priključnice 1 i 3 i t. d. Ploču postavimo vertikalno prema učenicima u razredu, pa će se otpori dobro i pregledno vidjeti.



Kod ovog otpora upotrebljena je otporna žica kantal. Žica je imala tvornički podatak 12,5 Ω/m, što znači da na 1 m duljine imade otpor od 12,5 Ω. Otpor od 1 Ω imat će žica dugačka 8 cm, a od 2 Ω žica dugačka 16 cm. Sada smo na ploči od lesonita izbušili rupe za priključnice. Važno je dobro procjeniti kolika mora biti udaljenost pojedinih priključnica. Ako hoćemo da između svake dvije susjedne priključnice bude otpor od 2 Ω, onda moramo postići da slobodna žica između dvije susjedne priključnice bude 16 cm. Dakle priključnice treba tako porazmjestiti, da bi otporna žica napeta oko priključnica kao na slici imala svoje dijelove izvan priključnica dugačke po 16 cm. Kada smo to postigli, treba sve priključnice pritegnuti pomoću matica i naš je otpornik gotov. Ukupni otpor razapete žice je 20 Ω. Oni dijelovi žice koji su ispod priključnica imaju neznatan otpor, jer su u kontaktu s priključnicom koja je iz debelog vodiča.

S ovim otporom, akumulatorima i mjernim instrumentima na pr. naše tvornice »Iskra« možemo kvantitativno izvesti ili provjeriti Ohmov zakon, djelomično zakon otpora, demonstrirati pad napona i dr. Ovaj otpor može nam dakako poslužiti i naprosto kao neki predotpor.

Dakako da analogno ovome možemo izraditi otpor od neke druge otporne žice, odnosno otpor na pr. od 10 Ω s dijelovima od 1 Ω i sl. Za gore navedene pokuse dobro je da je otpor što veći da bi utjecaj parazitskih otpora bio što manji.

E. V., Zagreb

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Mihajlo Pupin

(O stogodišnjici rođenja)

I danas ima svaki mladić, svaka djevojka neki uzor, neki »ideal«, koji izabiru prema svojim sklonostima. To su obično istaknuti predstavnici kulturnog i sportskog života; a prije su to bili i vojskovođe. K njima se posljednjih decenija pridružuju i veliki izumitelji. No osim tih »privatnih« uzora odgojitelji su omladini već odavno davali i zajedničke, opće uzore. Bili su to istaknuti predstavnici grčkog i rimskog vremena:

Aristid, Temistoklo, Aleksandar Veliki, braća Grakhi, Sciopini i t. d.

Stara poslovica: *primjeri privlače,* nije niti danas izgubila svoju aktuelnost nigdje pa niti kod nas. Tisuće palih heroja u našoj narodno-oslobodilačkoj borbi pridružilo se tisućama drugih, koji su vjekovima davali svoje živote za opstanak naših naroda. Osim njih postoje mnogobrojni naši još heroji nauke i rada, koji mogu našoj omladini poslužiti kao uzori vrijedni, da se ugleda u njih. Jedan svijetao uzor po svojoj jakoj volji, po svojoj upornosti i izdržljivosti, po svojoj nacionalnoj svijesti, koju je u stranom svijetu održao uvijek budnom, jest Mihajlo Pupin.

Rodio se 1858. god. u banatskom selu Idvor, blizu Pančeva, kao sin seljačke porodice. U svojoj autobiografiji: »Od pašnjaka do učenjaka« opisuje zorno svoje djetinjstvo i mladost. U doba njegovoga djetinjstva još je Banat bio sastavni dio Vojne granice ili Krajine. U kući njegovih roditelja su bile slike Karađorđa i Garibaldija. Dječak je često slušao o njima, a često je slušao i narodne pjesme. Mati ga je poučila o sv. Savi i njegovu značenju za kulturni život srpskoga naroda. Tako se u dječaku razvijala svijest, da je »borba za pravo, pravdu i slobodu najplemenitija i najuzvišenija stvar na ovom svijetu«. Kad je god. 1869. ukinuta Vojna granica, a s njom i povlastice, koje su Srbi dobili od austrijskog cara god. 1690. po svom doseljenju u Banat, Mihajlov otac izbacuje carevu sliku iz svoga doma. Mali je Pupin dakle veoma rano naučio pravilno prosuđivati položaj svoga naroda u Austro-Ugarskoj monarhiji i mrziti njegove tlačitelje. Bistrog je dječaka mati poticala na učenje. Sama nepismena, govorila bi mu često: »Znanje je svjetlost, koja osvjetljava naš put kroz ovaj svijet«. Po svršetku školovanja u Idvoru pošalju roditelji Mihajla u Pančevo. Tamo je prvi put čuo za prirodne nauke i za Franklina, a zatim i za Lincolna. Za vrijeme velikih ljetnih praznika Mihajlo pase sa svojim vršnjacima volove i sam nazivlje to svoje zanimanje svojim najzanimivijim ljetnim školovanjem.

Opetovano sudjelovanje u rodoljubnim manifestacijama srpske omladine u Pančevu onemogući Mihajlu daljnje školovanje u Pančevu. Pančevački rodoljubi nagovore Mihajlove roditelje, da dječaka pošalju u Prag. Ali u Pragu Mihajlo ne uči, nego se sa češkom omladinom iživljava u nacionalnim manifestacijama. Na putu u Prag mu jedan američki bračni par pripovijeda o Americi. Videći, da u Pragu njegov boravak znači zapravo izgubljeno vrijeme, mladi Pupin odlazi u proljeće 1874. g. u SAD i iskrcava se tamo s 5 centi u džepu i s najnužnijim odijelom.

Da može živjeti, mora raditi različne poslove. Postaje gonič mazga, pa radnik na brodu, gdje pomaže kod bojadisanja različnih brodskih predmeta. Sprema ugljen s ulice u podrume, odgrće snijeg i uči engleski. Svoje znanje i obrazovanje povećava u čitaonici po večerima, kad je slobodan. Upoznaje se s američkim mladićima i opaža njihovu vještinu u ručnim radovima, kao i prednosti, koje im je pružala ta vještina. Sam kaže: *»Cijelo moje iskustvo govori mi, da ručni rad daje mladom svijetu izvjesnu disciplinu, koja se nikad ne može steći samo iz školskih knjiga«.* Ali se zato mladi Pupin mnogo više od svojih američkih vršnjaka zanima za knjigu, za nauku. Radeći u tvornici dvopeka u New Yorku upoznaje dobro parni stroj, a pohađanje večernjih tečajeva, osobito iz fizike, nadopunjuje teorijskim znanjem njegova iskustva o parnom stroju, koja stiče danju u tvornici.

Veoma ga se dojmila velika izložba u Filadelfiji, god. 1876. priređena u slavu 100-godišnjice proglašenja nezavisnosti sjeveroameričkih kolonija u tom gradu. U tvornici djeluju na nj osobito dva čovjeka: ložač Jim svojom životnom filozofijom, koju mu je otkrivao na aforistički način, i jedan Nijemac, koji je skrenuo pažnju mladoga Pupina na latinski i grčki jezik i uopće na književ-

nost. Mladi Pupin počinje pohađati kazalište, upoznavati Shakespeare-a, Molière-a i američke pjesnike. Ali on čita i djelo znamenitog fizičara Tyndalla: »Toplina kao oblik kretanja«. Njegov njemački prijatelj mu pomaže pripremati se za prijamni ispit za koledž Columbiju. Slučajno poznanstvo s jednim trgovcem slovenskoga porijekla, i s njegovom porodicom, olakša mu dolazak u taj koledž. Da steče novčana sredstva za školovanje, preko ljeta cijepa drva na jednoj farmi. To mu je ujedno bila i gimnastika.

Mladi Pupin položi god. 1879., dakle 5 godina poslije svoga dolaska u Ameriku, prijamni ispit s tolikim uspjehom da je bio i oprošten od dosta visoke školarine. Na kraju prve godine postigne i nagrade iz grčkog jezika i matematike. Ali tek njegovo sudjelovanje u sportskom životu njegovih drugova, steče mu prijateljstvo američkih mladića, sve redom sinova bogatih, uglednih porodica. A po tom prijateljstvu je dobio i mogućnost da poučavanjem drugova, koji su slabije učili, stiče i sredstva za svoje školovanje. Velike ljetne praznike provodi mladi Pupin na selu, gdje kosi sijeno. Sam priznaje, da su mu njegove razvijene mišice, njegova tjelesna snaga i okretnost, njegov borbeni duh, sve plodovi njegova pastirskoga života u Idvoru i kasnijega rada za ljetnih mjeseci na američkim farmama, u velikoj mjeri pomogli, da se mogao održati u koledžu i ući u američko društvo, što mu samo znanje, ma i najveće, ne bi omogućilo.

God. 1883. svršava Pupin svoje školovanje u Columbija koledžu. U dva uzastopna dana dobiva diplomu o američkom građanstvu i o uspješnom završetku studija na koledžu. Ne samo pravno nego i po svojoj svijesti Pupin je sad bio potpun Amerikanac, ali u isto vrijeme i svijestan pripadnik srpskog naroda.

Tokom svoga školovanja Pupin nije imao mnogo prilike, da uči fiziku, koja ga je najviše privlačila. Tek je pred završetak saznao za Faraday-a i neka njegova otkrića. U Americi je učenje fizike bilo u ono doba tek u povoju, daleko iza onog u Evropi. Zato odlučuje Pupin, da ode u Evropu. Htio je da u Cambridge-u uči kod Maxwella njegovu elektromagnetsku teoriju svjetlosti ne znajući, da je Maxwell umro već 4 godine ranije. Ipak je 18 mjeseci proveo na tom sveučilištu. Odanle ode u Berlin, da sluša fiziku kod Helmholtza. U Berlinu je položio i doktorat filozofije. Poslije povratka u SAD postaje profesor fizike na sveučilištu Columbija, gdje je morao da sve takoreći stvara iz početka, jer dotad nije bilo tamo ni traga nekom naučnom istraživačkom radu na eksperimentalnoj bazi. Ipak su mu uspjela dva značajna pronalaska: indikcione uzvojnice, kojima je tek postalo moguće telefoniranje na veće daljine, i udešavanje uređaja za elektromagnetske valove, kojim se danas služi svaki slušač radioemisija pri izboru emisione stanice, koju želi slušati.

Za vrijeme I. svjetskog rata je Pupin u velikoj mjeri pomogao svojim velikim ugledom srpskoj i jugoslovenskoj stvari. Umro je godine 1935.

Mihajlo Pupin je svijetao primjer, što se može postići upornošću, izdržljivošću i jakom voljom. Ta njegova karakterna svojstva potrebna su i našoj omladini i za vrijeme studija i kasnije u životu, kad bude stupila u prve redove aktivnih radnika na izgradnji našeg novog, socijalističkog društva.

Vladimir Deduš, Zagreb

Награђени ученици у такмичењу из физике у НР Македонији

Пригодом такмичења из физике у НРМ о ком смо известили у прошлом броју, били су награђени ови ученици:

Јанев Ратко, уч. 8 р. г. »Ј. Б. Тито« из Скопја, првом наградом; *Миновски Ристо*, уч. 6 р. г. »Цветан Димов«, другом наградом; *Николовски Наум*, уч. 6 р. г. »Мирче Ацев«, из Прилепа, трећом наградом.

П. Д.

Zbroj kvadrata m prirodnih uzastopnih brojeva predočen kao zbroj kvadrata $m-1$ takvih brojeva

Dokazat ćemo, da postoji m prirodnih uzastopnih brojeva, kojima je suma kvadrata jednaka sumi kvadrata slijedećih $m-1$ uzastopnih brojeva.

Označimo li najveći od m prvih uzastopnih brojeva sa x, tada prema tvrdnji možemo formulirati jednadžbu

$$[x-(m-1)]^2+[x-(m-2)]^2+\ldots$$
$$\ldots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+$$
$$+(x+2)^2+\ldots\ldots+[x+(m-2)]^2+$$
$$+[x+(m-1)]^2\ldots \qquad (1)$$

(Lijeva strana jednadžbe (1) ima m kvadrata, a desna $m-1$). A sada je potrebno ustanoviti, ima li jednadžba (1) koje rješenje u prirodnim brojevima. — Ako prethodno iskvadriramo sve članove jednadžbe (1) na lijevoj i desnoj strani, tada se na obje strane istovremeno nalaze ovi članovi: $m-1$ puta x^2 i kvadrati svih prirodnih brojeva od 1 do $m-1$, pa se svi ti članovi ukidaju, te ostaje samo

$$x^2-2x(m-1)-2x(m-2)-\ldots$$
$$\ldots-4x-2x=2x+4x\ldots\ldots+$$
$$+2x(m-2)+2x(m-1),$$

a to se dalje (prebacivanjem svih članova osim x^2 na desnu stranu i izlučivanjem zaj. faktora) transformira na oblik

$$x^2=4x\cdot[1+2+\ldots\ldots+(m-2)+$$
$$+(m-1)]. \qquad (2)$$

Izraz u uglatim zagradama u (2) zbroj je prirodnih brojeva od 1 do $m-1$, $S=\frac{m-1}{2}(1+m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$, pa zato (2) poprima oblik

$$x^2=2m(m-1)x \qquad (3)$$

Jedno rješenje jednadžbe (3) je $x=0$, ali ne dolazi u obzir, jer tada svi traženi uzastopni brojevi nisu prirodni, odnosno dolazimo do nezanimljivih slučajeva kao $(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2$ i sl.

Drugo rješenje je $x=2m(m-1)$, a kako je i najmanji od uzastopnih brojeva, koji dolazi u obzir, prirodni broj, to jest $x-(m-1)=2m(m-1)-(m-1)=$ $=(m-1)(2m-1)$, to je time naša tvrdnja dokazana.

Tako je na pr.: za $m=2$, $3^2+4^2=5^2$; za $m=3$, $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$; za $m=4$, $21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+$ $+26^2+27^2$; i t. d.

Basar Ivan, svrš. uč. g., Karlovac

NOVE KNJIGE

D. S. Mitrinović:

METOD MATEMATIČKE INDUKCIJE

Izašlo je drugo izdanje ove knjižice br. 4 »Matematičke biblioteke«; ono se dosta razlikuje od prvog izdanja (o kom smo već referirali, vidi Mat.-fiz. list, godina 8., str. 75). Dodani su novi primjeri (na pr. str. 21, str. 59), dodana su neka nova poglavlja (kombinatorika, regresivna indukcija), date su neke formulacije principa indukcije, koje nisu bile u 1. izdanju, date su neke nove napomene, udopunjeni su historijski podaci, a i opseg je knjige uvećan za 16 stranica. Da se naklada od 2000 komada iscrpla za manje od godinu dana, znak je velikog interesa za tu knjižicu. Ona se naručuje kod izd. poduzeća »Nolit« Beograd.

S. Š.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

335. Дато је

$$y=10^{\frac{1}{1-\log x}};\quad z=10^{\frac{1}{1-\log y}}.$$

Показати да је $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$, ако су наведени логаритми декадни.

336. Дата су три броја a, b и c, тако да је $a<b<c$.

Који услов мора бити испуњен ако су a, b и c редом m-ти, n-ти и p-ти члан: *а*) аритметичке, *б*) геометриске прогресије?

337. Дат је низ $a_1, a_2, a_3, \ldots$

а) Наћи a_n и a_{n-1}, ако је дат збирни образац

$$S_n=an^2+bn, \qquad (1)$$

где су a и b две дате константе.

Упутства: *a)* из (1) се налази S_{n-1} кад се у њему n замени са $n-1$, *б)* $a_n = S_n - S_{n-1}$.

б) На основу резултата из *a)* показати да дати низ претставља аритметичку прогресију, затим одредити први члан и диференцију у функцији од a и b.

338.* За које вредности броја a израз $a^4 + a^3 + a^2 + a$ није дељив са 5?

339. Ако је a реалан параметар решити и дискутовати једначину

$$(a+1)^2 \sin^2 x - 8(a^2-1)\sin x - 15(a-1)^2 = 0.$$

340. Између дужина тежишница t_a, t_b, и t_c и странице трокута, како је познато, постоји релација

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Докажи да постоји и релација

$$16(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4).$$

341. С помоћу рачуна деривација riješi ове задатке: *a)* између свих стожаца исте изводнице s одреди онај, коме је обујам највећи; *b)* из трију дасака ширине a како би начинио жлијеб што већег пресјека?

342. Neka se odredi položaj broja -1 prema korijenima jednadžbe

$$(m-6)x^2 - 4x(m-1) + m - 3 = 0,$$

kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

343. Ако су од три тангенте параболе двије чврсте, а трећа се помиче, докажи аналитички, *a)* да се одрезак на покретној тангенти омеђен с прве двије, види из фокуса параболе под сталним кутом; *b)* да кружница описана трокутu, што га затварају те три тангенте, пролази фокусом параболе; *c)* да сјециште висина спомењутог трокута леži на равналици параболе, којој су задане четири тангенте!

344. Правци: $p_1 \equiv 2x + 3y - 6 = 0$, $p_2 \equiv x - 4y - 8 = 0$, $p_3 \equiv 3x - y + 9 = 0$ затварају трокут; нађи једнадžбе кружнице описане томе трокуту, а да не одредиš координате његових врхова! За покус нађи координате врхова и потврди, да задовољавају добивену једнадžбу кружнице!

Напомена: ако су $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$, једнадžбе triju linija, a k i l какvigod brojevi, krivulja s jednadžbom

$$f(x, y) \cdot g(x, y) + kg(x, y)\,h(x, y) + lh(x, y)\,f(x, y) = 0$$

prolazi sjecištima po dviju od one tri linije.

345. Zadana je jednadžba

$$u^2 - ux + x - y = 0,$$

gdje je u nepoznanica, a x i y su koordinate točke M u ravnini. Na kojoj se krivulji nalazi točka, ako jednadžba ima *a)* dvostruki korijen; *b)* produkt oba korijena jednak 1; *c)* zbroj oba korijena jednak 2; *d)* u kojem se području ravnine mora nalaziti točka M, da su oba korijena realna i različita; *e)* da je produkt oba korijena realan i veći od 1; *f)* da je zbroj oba korijena realan i veći od 2?

346.* Odredi najmanji broj, koji podijeljen s 2 daje ostatak 1, podijeljen s 3 daje ostatak 2, podijeljen s 4 daje ostatak 3 i t. d. i najzad, podijeljen s 10 daje ostatak 9.

347. Dokaži, da je vrijednost izraza

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$ jednaka 4.

348. U kvadrat je upisan kvadrat. Omjer površina tih kvadrata je 3 : 2. Koliki je kut između stranice većeg i stranice manjeg kvadrata?

B) Zadaci iz fizike

166. Brzi vlak giba se brzinom v=90 km sat^{-1}. Kočenjem se zaustavi na putu s=150 metara. Koliki kut α sa horizontalnom ravninom zatvara površina vode u tenderu lokomotive na tom dijelu gibanja vlaka?

167. Kolikom maksimalnom brzinom v motociklista može voziti po horizontalnoj cesti, koja zakreće s polumjerom r=70 m, ako je koeficijent trenja kotača i ceste μ jednak 0,3? Za koliki je kut α motociklista nagnut kod te brzine prema vertikalnoj ravnini?

168. Koliku brzinu mora imati olovna kugla, da bi se rastalila, kada udari u željeznu ploču? Zadano: temperatura okoline t_1=27^0 C, temperatura tališta olova t_2=327^0 C, toplina taljenja olova je 5 cal, specifična toplina olova c=0,03 cal g^{-1} st^{-1}.

169. Pravokutna istokračna prizma načinjena je od stakla indeksa loma n=1,54. Koliki je kut devijacije zraka, koja pada na katetnu plohu prizme paralelno s hipotenuznom plohom, ako je a) kut prizme 90^0, b) kut prizme 45^0?

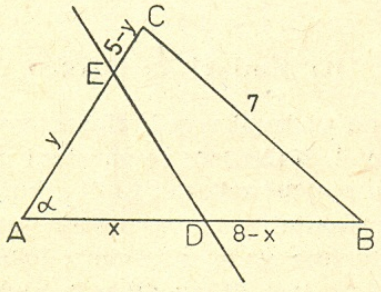
170. Napon između dviju paralelnih ploča smještenih u vakuumu jest V=2 700 V. Kojom brzinom v stigne elektron na pozitivnu ploču, ako pođe neznatnom brzinom s negativne ploče? — Masa elektrona m je 9,1.10—28 g, naboj elektrona e je 4,8.10—10 el. st. c. g. s.

C) Rješenja iz matematike

321. *Date su strane trougla* ABC : $AB = 8$ *cm*, $BC = 7$ *cm*, $CA = 5$ *cm. Jedna prava, koja seče* AB *u* D, *a* AC *u* E, *deli trougao* ABC *na trougao* ADE *i četvorougao* $BCED$.

Neka je $AD = x$, $AE = y$.

a) Izraziti y *kao funkciju od* x *iz uslova da trougao* ADE *i četvorougao* $BCED$ *imaju jednake obime.*

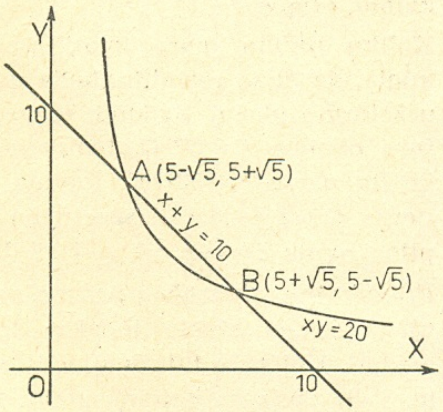


b) Izraziti y *kao funkciju od* x *kad su površine pomenutih delova jednake.*

v) Odrediti x *i* y *tako da ti delovi imaju u isto vreme jednake i obime i površine.*

Rezultat proveriti na grafičima funkcije a *i* b.

a) Ako trougao ADE i četvorougao $BCED$ imaju jednake obime, biće



$AD + DE + AE = DB + BC + CE + ED$ или $x + y = 8 - x + 7 + 5 - y$, $2(x + y) = 20$, $x + y = 10$, $y = 10 - x$.

b) Ako je $p_1 = p_2$, to je $2p_1 = xy \sin\alpha$ ili $\frac{40 \sin\alpha}{2} = xy \sin\alpha$, $xy = 20$, $y = \frac{20}{x}$.

v) Zajedničko rešenje jednačina iz *a)* i *b)*: $x + y = 10$, $xy = 20$, $x^2 - 10x + 20 = 0$, $x_1 = 5 - \sqrt{5}$, $y_1 = 5 + \sqrt{5}$, $x_2 = 5 + \sqrt{5}$, $y_2 = 5 - \sqrt{5}$.

Pavičević C. Momir, 4$_1$ r. g. Smed. Palanka

322. *Date su tri polinoma* $P = (bx + c)^2 + (b_1x + c_1)^2$, $Q = (cx + a)^2 + (c_1x + a_1)^2$, $R = (ax + b)^2 + (a_1x + b_1)^2$. *Dokazati: ako su* P *i* Q *potpuni kvadrati, onda i* R *potpuni kvadrat.*

Ako polinome P i Q razvijemo pa zatim sredimo po potencijama, imaćemo

$P = (b^2 + b^2_1)x^2 + 2(bc + b_1c_1)x + c^2 + c^2_1$,

$Q = (c^2 + c^2_1)x^2 + 2(ac + a_1c_1)x + a^2 + a^2_1$.

Da bi jedan kvadratni trinom bio potpun kvadrat treba da mu je diskriminanta jednaka 0. Diskriminanta polinoma P posle sređivanja je $DP = -(bc_1 - b_1c)^2$, a polinoma Q $DQ = -(ac_1 - a_1c)^2$. Kad ih izjednačimo sa nulom dobijamo

$$\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \text{ i } \frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Polinom R, koji se piše

$R = (a^2 + a^2_1)^2 + (ab + a_1b_1)x + b^2 + b^2_1$

je potpun kvadrat, ako je

$$D_R = -(a_1b - a_1b)^2 = 0 \text{ tj. } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Iz gornjih se jednakosti vidi da je to zaista ispunjeno.

Pavlović Vladan, uč. 4$_3$ r. g. Svetozarevo

323. *Dana je ednačba*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (b^2 - 4ac \geqq 0)$$

s korenima x_1 in x_2.

a) Izrazi kot funkcijo a, b *in* c*-ja produkt*

$$P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1)$$

kjer je k *dano število.*

Od tu izvedi pogoj med a, b *in* c, *ko je razmerje med koreni enako številu* k.

b) Iz pretpostavke, da je ta pogoj izpolnjen, pokaži, da se lahko koreni izrazijo kot racionalne funkcije a, b *in* k.

a) Produkt se lahko piše tudi:

$$P = x_1x_2(k^2 + 1) - k(x^2_1 + x^2_2)$$

kakor je po Viètovih formulah

$$P = \frac{ac(k^2+1) - k(b^2 - 2ac)}{a^2} = \frac{ac(k+1)^2 - kb^2}{a^2}$$

za $k = \frac{x_1}{x_2}$ ali $x_1 - kx_2 = 0$, je $P = 0$

torej $ac(k+1)^2 - kb^2 = 0,\ (a \neq 0)$ (1)

b) Iz pogoja (1) sledi

$$c = \frac{kb^2}{a(k+1)^2}.$$

Od tu je

$$D = b^2 - \frac{(k+1)^2 - 4k}{(k+1)^2} = b^2\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}$$

in koreni se glasijo

$$x_1 = -\frac{b}{a}\frac{1}{k+1},\quad x_2 = -\frac{b}{a}\frac{k}{k+1},$$

torej so izraženi racionalno s k, a, b.

Janez Lesjak, dij. 3. r. g. Kočevje

324. *Razrešiti sistem* 101 *enačbe s* 101 *neznanko:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{100} + x_{101} = 0,$$
$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = \ldots =$$
$$= x_{99} + x_{100} = x_{100} + x_{101} = 1.$$

Iz enačbe $x_1 + x_2 = x_2 + x_3$ dobimo $x_1 = x_3$. Podobno izračunamo tudi druge neznanke. Iz $x_2 + x_3 = x_3 + x_4$ dobimo $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5, \ldots x_{98} = x_{100}$, $x_{99} = x_{101}$, ali

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = \ldots\ldots = x_{99} = x_{101}$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = \ldots\ldots = x_{98} = x_{100}.$$

Če to vstavimo v enačbo

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{100} + x_{101} = 0,$$

dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$51x_1 + 50x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$

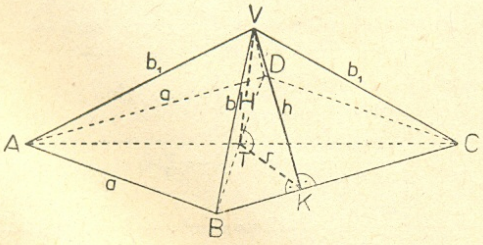
Iz tega dobimo: $x_1 = -50$, $x_2 = 51$.

Rešitev danega sistema 101 enačbe s 101 neznanko je

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = \ldots = x_{99} = x_{101} = -50$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = \ldots = x_{98} = x_{100} = 51.$$

Maček Vilko, dij. 2. b r. IV. g. Ljubljana

325. *База пирамиде је ромб с дијагоналама* 6 *m и* 8 *m. Висина пирамиде пада у сјечиште дијагонала, а износи* 1 *m. Наћи површје пирамиде!*



Треба најпрво да ги израчунаме основниот раб a, и бочната височина h. Од правоаголниот триаголник ABT по питагорова теорема имаме:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 5.$$

За да ја израчунаме бочната височина h треба го одредиме радиусот r на вписаната кружна линија во ромбот $ABCD$. Бидејќи r е 1/2 од височината на ромбот имаме:

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot 2r\,;\quad 24 = 5 \cdot 2r;\quad r = 2{,}4.$$

И од правоаголниот триаголник TKV по питагорова теорема

$$h = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}6.$$

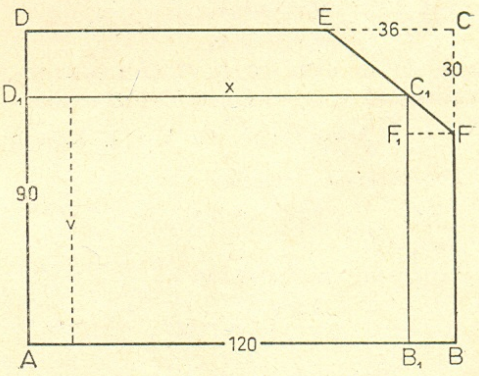
Затое е оплошјето на пирамидата

$$O = \frac{d_1 d_2}{2} + 2ah = 24 + 26 = 50\ (m^2).$$

Најдова Душанка
2 кл. г. »Ј. Б. Тито«, Битола

326. *Од правоугаоне стаклене плоче* (a = 120 *cm*, b = 90 *cm*) *одломио се на једном углу троугаони део с катетама* 36 *cm* (*на страни a*) *и* 30 *cm* (*на страни b*). *Из већег окрњеног дела треба изрезати правоугаону плочу максималне површине. Колике су димензије нове плоче?*

Димензије нове плоче обележимо са x и v. Тада из сличности троуглова $\triangle CEF$ и $\triangle F_1FC_1$ имамо $30 : (v - 60) = 36 : (120 - x)$ одакле $v = 160 - \frac{5x}{6}$. Површина правоугаоника је



$$P = xv = x\left(160 - \frac{5x}{6}\right) = -\frac{5}{6}x^2 + 160x.$$

P је максимално за $P' = 0$ тј. за

$$-2 \cdot \frac{5}{6}x + 160 = 0\ \ (P'' < 0),$$

одакле је $x = 96$ *cm* и $v = 80$ *cm*.

Павловић Владан, уч. 4 р. г. Светозарево

Ковач Антал, уч. 4 р. г. из Сомбора и неки други рјешаватељи налазе екстрем квадратне функције без рачуна деривација:

$$f(x) = -\frac{5}{6}x^2 + 160x$$

има максимум за

$$x = -\frac{160}{2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)} = 96.$$

327. *V točkah A in B enakostranične hiperbole povlečemo tangenti t_1 i t_2. Skozi točko A povlečemo vzporednico k t_2, skozi B pa k t_1. Obe se sečeta v točki C. Dokaži, da so točke A, B, C in središče hiperbole O koncikličnе!*

Smerni koeficient tangente hiperbole v točki $A(x_1, y_1)$ je $\frac{x_1}{y_1}$, torej je vzporednica skozi B k t_1

$$p_2 \equiv x_1x - y_1y - x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Podobno je za tangento t_2 vzporednica skozi A

$$p_1 \equiv x_2x - y_2y - x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Spojnici točk A in B pa imata ednačbi:

$l_1 \equiv y_1x - x_2y = 0$ ter $l_2 \equiv y_2x - x_2y = 0$.

Da se da četverokotniku $OACB$ očrtati krog, morajo biti nasprotni koti suplementarni, oziroma

$$tg\, l_2l_1 + tg\, p_1p_2 = 0, \quad tg\, l_1p_1 + tg\, p_2l_1 = 0.$$

Pritem se mora obdržati isti raspored premic, sicer kot spremni smisel:

$$tg\, l_1l_2 = -tg\, l_2l_1.$$

Ker je

$$tg\, l_2l_1 = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1x_2 + y_1y_2} = -tg\, p_1p_2$$

sledi, da so točke A, B, C, O koncikličnе, oziroma, da je četverokotnik $OACB$ tetiven.

Janez Lesjak, dij. 3. r. g. Kočevje

328. *Решити једначину*

$$tg\, 2x = m\, tg\, x.$$

Дискусија!

Ако развијемо добићемо

$$\frac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x} = m\, tg\, x \qquad \text{или}$$

$$tg\, x\,[2 - m(1 - tg^2 x)] = 0,$$

$$tg\, x = 0, \quad x = k\pi$$

$$2 - m(1 - tg^2 x) = 0, \quad tg\, x = \pm\sqrt{\frac{m-2}{m}}.$$

Према једначинама

(1) $tg\, x_1 = \sqrt{\frac{m-2}{m}}$ и (2) $tg\, x_2 = -\sqrt{\frac{m-2}{m}}$

корени дате једначине су:

$$x_1 = arctg\sqrt{\frac{m-2}{m}} + k\pi,$$

а из једначине

(2) $$tg\,(\pi - x_2) = \sqrt{\frac{m-2}{m}}$$ и

$$x_2 = \pi(k+1) - arctg\sqrt{\frac{m-2}{m}}$$

где је $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Корени су реални док је $\frac{m-2}{m} > 0$ или за $m > 2$ и $m < 0$. За $m = 2$, $tg\, k_{1,2} = 0$, те је $x_1 = x_2 = k\pi$, кад $m \to \pm\infty$, $tg\, x_1, x_2 \to \pm 1$. За $m \to 0$ нег. вредностима, $x \to \frac{\pi}{2}$.

Радовановић Нинослав
уч. 4_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш

329. *Докажи помоћу рачуна деривација да је $y = sin^6x + 3\, sin^2x\, cos^2x + cos^6x$ сталан број тј. да не зависи од x.*

Ако начинимо деривацију тога израза имамо:

$y' = 6\, sin^5x\, cos\, x + 3\,(2\, sin\, x\, cos\, x \cdot cos^2 x - 2\, cos\, x\, sin\, x \cdot sin^2 x) - 6\, cos^5 x\, sin\, x =$
$= 6\, sin^5 x\, cos\, x + 6\, sin\, x\, cos^3 x - 6\, sin^3 x\, cos\, x - 6\, sin\, x\, cos^5 x = 6\, sin^3 x\, cos\, x\,(sin^2 x - 1) + 6\, sin\, x\, cos^3 x\,(1 - cos^2 x).$

Како је $sin^2 x - 1 = -cos^2 x$ и $1 - cos^2 x = sin^2 x$, то можемо написати

$y' = -6\, sin^3 x\, cos^3 x + 6\, sin^3 x\, cos^3 x = 0.$

Пошто је деривација константе увек нула, и израз

$$y = sin^6x + 3\, sin^2x\, cos^2x + cos^6x$$

је константан, тј. он не зависи од x.

Шушић М. Томислав, уч. 4_4 р. г. Чачак

330. *Izračunaj derivaciju od*

a) $y = \frac{(1 + sin\, x)^2}{sin\, x(1 - sin\, x)}$, *b)* $y = \frac{x(3 + 2x^2)}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

a) $y' = \frac{1}{sin^2 x(1 - sin\, x)^2}[2\, sin\, x\, cos\, x\,(1 + sin\, x)(1 - sin\, x) - (1 + sin\, x)^2(cos\, x - 2\, sin\, x\, cos\, x)] =$

$= \frac{cos\, x}{sin^2 x\,(1 - sin\, x)^2}\left[2\, sin\, x\, cos^2 x - \frac{1 + sin\, x}{1 - sin\, x}\, cos^2 x\,(1 - 2\, sin\, x)\right] =$

$= \frac{cos^3 x}{sin^2 x\,(1 - sin\, x)^3}[2\, sin\, x\, cos^2 x - 1 + 2 sin\, x - sin\, x + 2\, sin^2 x] = \frac{cos^3 x\,(3\, sin\, x - 1)}{sin^2 x\,(1 - sin\, x)^3}:$

$$b)\ y' = -\frac{(3+6x^2)\cdot 3\sqrt{(1+x^2)^3} - 2x^2(3+2x^2)\frac{9}{2}\sqrt{(1+x^2)}}{9(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{(1+2x^2)(1+x^2) - x^2(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Bodlović Petar, uč. 4. a r. 1. g. Zagreb

331. *У којој се области равни мора налазити тачка* $M(a, b)$, *ако једначина*

$$4x^2 + 4(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$$

има оба своја корена између -1 *и* $+1$?

Да једначина има оба своја корена између -1 и $+1$ односно $-1 < x_1 < x_2 < +1$ мора бити испуњено

$$D \geqq 0,\ af(-1) > 0,\ af(+1) > 0$$

и

$$-1 < \frac{S}{2} < +1$$

где је $S = -(a+b)$.

Ове услове применимо на дату једначину и добијамо:

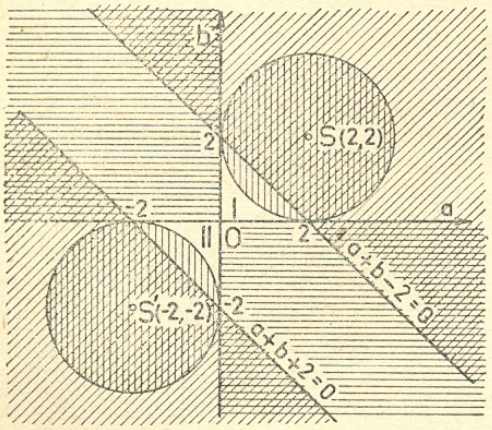
1° $4(a+b)^2 - 4(a^2+b^2) \geqslant 0$ или $ab > 0$ тј. $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ и коор. почетак.

2° $a^2 + b^2 - 4a - 4b + 4 > 0$

3° $a^2 + b^2 + 4a + 4b + 4 > 0$

4° $-1 < \frac{4(a+b)}{8}$ односно $a + b + 2 > 0$

5° $\frac{4(a+b)}{8} < 1$ одакле је $a + b - 2 < 0$.



Ако бројеве a и b сматрамо као координате неке тачке у равни, може се лако видети геометриско значење горњих услова. Нацртајмо кругове

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 = 4,\ (a+2)^2 + (b+2)^2 = 4$$

и праве

$$a + b + 2 = 0,\ a + b - 2 = 0$$

и исцртајмо делове равни где леже тачке које горњим условима не задовољавају.

Првом услову одговарају тачке у првом и трећем квадранту и коор. почетак, другом и трећем услову тачке изван нацртаних кругова, четвртом и петом тачке с оне стране припадних права где је коор. почетак.

Излази да тачка $M(a, b)$ мора бити у неисцртаном делу, што га одређују оба круга и праве.

Јевросима С. Станојевић
ванр. уч. 4. р. вмг. »Св. М.«, Ниш

332. *Konstruiraj pravokotni trikotnik, če je dan polmer* r *očrtanega kroga i polmer včrtanega kroga* ρ.

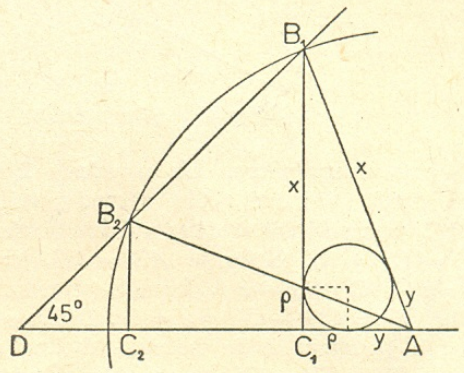
V trikotniku AB_1C_1 velja

$$a = \rho + x$$
$$b = \rho + y.$$

Če te enačbi seštejemo, dobimo

$$a + b = 2\rho + x + y \quad \text{ali}$$
$$a + b = 2(\rho + r)$$

stem je konstrukcija trikotnika iz r in ρ prevedena na konstrukcijo iz $a + b$ in $c\ (= 2r)$.



Konstrukcija je sledeča:

Načrtamo daljico $DA = 2(\rho + r)$ in konstruiramo v oglišču D poltrak pod kotem 45°, ki ga sečemo s krogom s polumerom $2r$ in središčem v A. Dobimo oglišči B_1 in B_2, od tu pa še oglišči C_1 in C_2 iskanih trikotnikov.

Naloga ima dve, eno ali nobeno realno rešitev, če je $r \gtreqless \rho(\sqrt{2}+1)$.

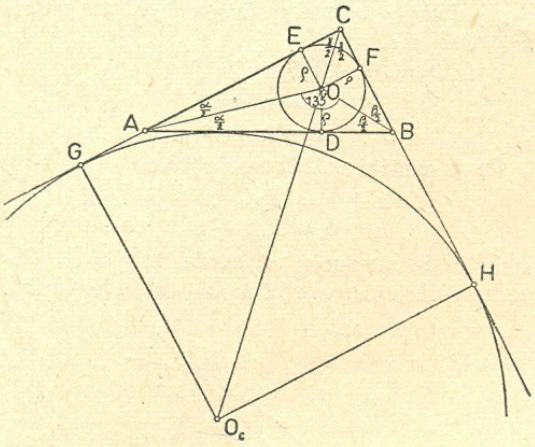
Janez Lesjak, dij. 3. r. g. Kočevje

2. način. Kako je trokut pravokutan, hipotenuza nam je poznata, jer je $c = 2r$. Zadatak se svodi na to, da se odredi središte O upisane kružnice. Ono će biti za ρ udaljeno od hipotenuze, prema tome, na pravcu, paralelnom s hipotenuzom. Znamo, da je O na sjecišta simetrala kutova, pa imamo:

$$\alpha + \beta = 90°,\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°,$$
$$\varphi = 180° - 45° = 135°.$$

Dakle, treba odrediti geom. mjesto vrhova svih jednakih kutova 135°, kojemu krakovi idu kroz A i B. To je luk kružnice, čija je konstrukcija poznata. Lako se razabira, da je središte tog luka na sjecištu simetrale stranice AB i polukružnice opisane iz središta hipotenuze s polumjerom r. Kad je taj luk nacrtan, treba povući paralelu s hipotenuzom u udaljenosti ρ. Dobivamo traženo sjecište O upisane kružnice. Konstrukcija se lako svršava. Moguća su 2 sukladna trokuta.

Hendeković Josip, 4. b r. 2. g. Zagreb



Napomena uredništva. Uz navedena 2 načina postoji još i ovaj način: nacrtaj pravi kut kod C, zatim odredi središte upisane kružnice ($CE = CF = \rho$). Kako je $AB = EG$, jer je $CG = s$, a $CE = s - c$ (vidi udžb. trigonom.), to je $EG = CG - CE = c = 2r$. Dakle se iz zadanih podataka dade nacrtati dužina $c + \rho = CG$ i $CH = CG$ pa se dade nacrtati i središte O_c kao sjecište okomica u G i H. Kad su oba ta kruga nacrtana, treba samo povući zajedničku unutarnju tangentu tih krugova, pa dobivamo stranicu AB. Zadatak je moguć, kad je $OO_c \geqq \rho + \rho_3$ ili jer je $OO_c = 2r\sqrt{2}$, $\rho_3 = s = 2r + \rho$, to je

$$r(\sqrt{2} - 1) \geqq \rho \quad \text{ili} \quad r \geqq \rho(\sqrt{2} + 1).$$

333. *Točke* $A(-3, -1)$ *i* $C(5, 5)$ *vrhovi su trokuta, a* $S\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ *je središte tome trokutu upisane kružnice. Nađi koordinate trećeg vrha B trokuta.*

Polumjer kružnice upisane trokutu izračunava se kao udaljenost točke S od pravca, što prolazi točkama A i C. Jednadžba je tog pravca

$$y + 1 = \frac{6}{8}(x + 3) \quad \text{ili} \quad 3x - 4y + 5 = 0$$

zato je

$$\rho = -\frac{3 + 2 + 5}{-\sqrt{9 + 16}} = 2,$$

pa je jednadžba kružnice

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$$

Tražena je točka B sjecište tangente iz A i C. Za tangentu iz A izlazi eliminacijom od l između $r^2(k^2 + 1) = (q - kp - l)^2$ i $l = 3k - 1$, $48k^2 - 16k - 15 = 0$, $k_1 = \frac{3}{4}$, $k_2 = -\frac{5}{12}$. Odgovara samo k_2, jer nam je tangenta za k_1 već poznati pravac AB, pa je $l_2 = -\frac{9}{4}$.

Slično za tangentu iz C izlazi eliminacijom od l iz $r^2(k^2 + 1) = (q - kp - l)^2$ i $l = 5 - 5k$, $48k^2 - 176k + 105 = 0$, $k_1 = \frac{3}{4}$, $k_2 = \frac{35}{12}$ i $l_2 = -\frac{115}{12}$. Točku B dobivamo kao sjecište tangenata iz A i C t. j.

$$y = -\frac{5}{12}x - \frac{9}{4} \quad \text{i} \quad y = \frac{35}{12}x - \frac{115}{12} \quad \text{ili}$$

$$B\left(2\frac{1}{5}, -3\frac{1}{6}\right).$$

Hendeković Josip, 4. b r. 2. g. Zagreb

334. $(3 \cdot \square 4)^2 = 492\square 04$

Koje tri cifre su nagorjele?

Budući da se na lijevoj strani nalazi $3^2 = 9$ to mora da bude i desna strana djeljiva sa 9, t. j. zbir cifara na desnoj strani mora biti djelj v sa 9. Kako zbir poznatih cifara iznosi 19, to mora nepoznata cifra biti 8.

Kvadrat nepoznatog broja na lijevoj strani dobijemo ako 492 894 podijelimo sa $3^2 = 9$. $492\,804 : 9 = 54\,756$. Dakle je nepoznati broj $\sqrt{54\,756} = 234$.

Neoštećen papir izgledao je:

$$(3 \cdot 234)^2 = 492\,804.$$

Dvizac Menail, III Am Mostar

Riješili zadatke iz 1. broja

Bajtarević Ahmed, 4. r. gimn. Visoko, 322, 328, 329; *Bazler Marta*, 3_4 r. gim. Sombor, 325, 332, 333, 334; *Bazler Miklós*, 2_4 r. g. Sombor, 325, 332, 334; *Begović Fehim*, 4b r. g. Doboj, 324, 325, 331; *Bodlović Petar*, 4a r. 1. g. Zagreb, 321, 322, 323, 326, 328,

339, 330a,b, 331, 332, 333; *Cankar Ivan*, 3. r. g. Škofja Loka, 324, 325, 334; *Čanji Ana*, 2 r. gim. Sombor, 321, 322, 325, 332, 334; *Draškovič Radoje*, 4a r. g. Cetinje, 323, 324, 325, 328, 334; *Dvizac Menail*, 3 Am STŠ, Mostar, 321, 323, 324, 326, 328, 333, 334; *Fehér Kamilo*, 2_4 r. g. Sombor, 325, 332; *Fill Ferenc*, 2_4 r. g. Sombor, 325 (djel.), 332, 334; *Gros Mladen*, 4a r. g. Ljubljana, 321, 323, 326, 328, 329, 330a,b, 332, 333; *Hendeković Josip*, 4. r. 2. g. Zagreb, sve zadatke; *Iličić Miroslav*, 3b r. g. Vukovar, 325; *Jevtić Milan*, 4_3 r. g. »Vuk Karadžić« Loznica, 321, 323, 324, 325, 326; *Koršoš Arpad*, 2g r. g. Vršac, 325; *Kovač Antal*, 4b r. g. Sombor, 321, 322, 324, 325, 328, 332, 334; *Krebs Silvija*, 3_4 r. gimn. Sombor, 324, 325, 333: *Lentar Franc*, 2a r. g Kočevje, 325; *Lesjak Janez*, 3 r. g. Kočevje, sve zadatke; *Lojen Miroslav*, 4a r. g. Varaždin, 323; *Maček Vilko*, 2b r. 4. g. Ljubljana, 321, 324, 325, 332; *Mere Ištvan*, 4b r. g. Sombor, 321, 324, 325, 328, 334; *Mesiković Behđed*, 3_2 r. g. Mostar, 321, 322, 323, 325, 331, 332, 334; *Milašinović Slobodan*, 3_2 r. g. Smed. Palanka, 321, 332, 334; *Mitrović Blažo*, STŠ, G_3 Titograd, 325, 326; *Pleše Božidar*, 4a r. g. Varaždin, 328, 333; *Skrt Marko*, 3. r. gimn. Koper, 326; *Sokolovski Jani*, 3b kl. g. »J. B. Tito«, Bitola, 321 (djel.); *Suljagić Salih*. 3. r. 5. g. Zagreb, 324, 325, 329, 330a,b; *Tegleš Jene*, 4b r. g. Sombor, 325, 328, 334; *Анђић Александар*, 4 р. г. Трстеник, 321, 322, 324, 325, 326, 331, 332, 333, 334; *Богданов Лазар*, 2_1 р. 8 београд. гимн. 325, 332, 334; *Димитров Ристо*, 4b кл. гим. Охрид, 321; *Ђорђевић Радмила*, 3_3 р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 321, 324, 325, 332, 334; *Ђурић Г. Зоран*, 4_1 р. г. Чачак, 321, 323, 326, 328, 332; *Јеремић Ђурђе*, 3_3 р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 321, 322, 323, 324, 325, 332, 334; *Калајнић Милисав*, 3_2 р. г. Чачак, 324, 325, 326; *Кирић Миодраг*, 3_3 р. 2 г. Зрењанин, 321, 323, 324, 326, 332; *Константиновић Б. Милован*, 4_1 р. г. Ћуприја, 328, 332; *Кулматицки Владимир*, 6_1 р. г. Ћуприја, 325; *Летић Милан*, 4е р. г. »Моша Пијаде«, Суботица, 321, 326, 332; *Миловановић Рајко*, 3_3 р. г. Алексинац, 321, 325, 326; *Милошевић Веселин*, 3_4 р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 334; *Најдова Душанка*, 2 кл. г. »J. Б. Тито«, Битола, 325, 332; *Обрадовић Зорица*, 2с р. гимн. Вршац, 332; *Павићевић Момир*, 4_1 р. г. См. Паланка, 321, 326, 328, 329, 330a,b, 332; *Павловић Владан*, 4_3 р. г. Светозарево, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 328, 329, 330a,b, 331, 332, 333; *Перовић Григорије*, 3. р. СТШ, Титоград, 333; *Петровић Мирослав*, 1_1 р. гимн. »Ст. Сремац«, Ниш, 325; *Радовановић Нинослав*, 4_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 321, 323, 326, 328, 332, 333; *Станојевић Јевросима*, ванр. уч. 4 р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 322, 323, 328, 329, 330, 331, 333; *Шутић М. Томислав*, 4_4 р. г. Чачак, 321, 323, 326, 328, 332, 333.

D) Rješenja zadataka iz fizike

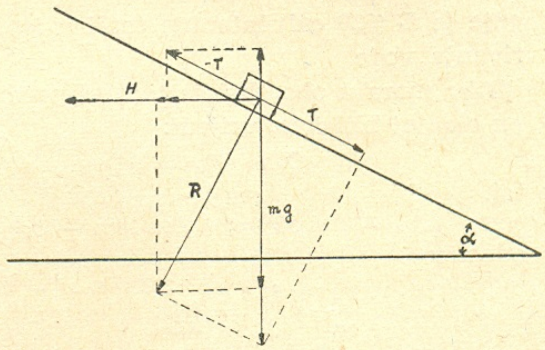
161. Sanduk težine 5 kp klizi bez akceleracije niz hrapavu kosinu nagiba 30°. Koliki je koeficijent trenja? Kolika horizontalna sila je potrebna, da bi se on gibao uzbrdo bez akceleracije po istoj kosini?

Koeficijent trenja je omjer sile trenja i sile pritiska na podlogu. Ako se sanduk giba jednoliko niz kosinu kod nagiba kosine $\alpha = 30^0$, znači, da je komponenta T sile teže koja djeluje niz kosinu jednaka sili trenja po veličini no suprotnog smjera. Sila pritiska na podlogu je komponenta R sile teže, koja djeluje okomito na kosinu.

Prema tome koeficijent trenja:

$$\mu = \frac{T}{R} = \frac{mg \sin\alpha}{mg \cos\alpha} = tg\,\alpha = tg\,30° = \underline{0{,}577}.$$

Ako želimo, da nam sanduk klizi jednoliko uz kosinu moramo na njega djelovati silom u smjeru uz kosinu, koja je po veličini jednaka $2T$, t. j. silom T zbog



sile teže i još silom T da svladamo trenje. Horizontalna sila je komponenta sile $2T$ u horizontalnom smjeru t. j.

$$H = 2T \cos\alpha.$$

Zbog toga što djelujemo na sanduk silom $2T$ uz kosinu, možemo pisati jednadžbu (gledaj sl.):

$$mg = R\cos\alpha - T\sin\alpha,$$

odnosno

$$mg = \frac{T}{tg\,\alpha}\cos\alpha - T\sin\alpha, \qquad \text{t. j.}$$

$$T\left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right) = mg, \qquad \text{ili}$$

$$T = mg\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha},$$

Konačno dobijemo:

$$H = 2\,mg\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = mg\,tg\,2\alpha =$$

$$= 5 \cdot tg\,60^\circ = 5 \cdot 1{,}73 = \underline{8{,}65\ kp.}$$

162. Temperatura vode kod ulaza u sistem za centralno grijanje je 82° C, a kod izlaza iz sistema temperatura vode je 48°C. Želimo zamijeniti vodu s vodenom parom od 100°C, koja bi ulazila u sistem pod atmosferskim pritiskom, dok bi na izlazu iz sistema imali vodu od 82°C. Nađite omjer mase vode m_1, odnosno mase vodene pare m_2, ako je toplina predana okolini ista u oba slučaja.

Količina topline, koju preda okolini voda jednaka je

$$Q_1 = m_1\,(82 - 48) \cdot 1$$

gdje je m_1 masa vode (specifična toplina vode je 1).

Količina topline koju preda vodena para mase m_2 okolini, jednaka je

$$Q_2 = m_2 \cdot L + m_2\,(100 - 82) \cdot 1$$

gdje je L (539 cal) latentna toplina isparivanja vode.

Ako mora u oba slučaja toplina predana okolini biti ista, vrijedi:

$$Q_1 = Q_2,$$

t. j.

$$m_1\,(82 - 48) = 539\,m_2 + m_2\,(100 - 82),$$

odnosno

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{557}{34} = \underline{16{,}4.}$$

163. Zadan je krug struje prikazan shemom na sl. 1. Otporna žica AC duga je 100 cm. Galvanometrom ne teče struja, kad je AB=42 cm. Kolika je tada elektromotorna sila E_2? Baterija E_1 ima elektromotornu silu 1,5 V i zanemarivo mali unutarnji otpor.

Napon između točke A i C je $V_{AC} = E_1$, a naponi

$$V_{AC} : V_{AB} = 100 : 42,$$

t. j.

$$V_{AB} = \frac{42}{100}\,V_{AC}.$$

Napon V_{AB} kompenziran je naponom baterije E_2, pa je prema tome

$$E_2 = \frac{42}{100}\,E_1 = 0{,}42 \cdot 1{,}5 = \underline{0{,}63\ V.}$$

164. Koliki otpor između stezaljka A i B pruža mreža otpora prikazana shemom na sl. 2.?

Iz zakona o serijskom spajanju otpora:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$$

i zakona o paralelnom spajanju otpora,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$$

u našem slučaju izlazi:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2+1}}} = \frac{15}{11},$$

$$R = \frac{11}{15} = 0{,}73\ \Omega.$$

165. Svijeća je udaljena 20 cm od pozitivne leće, koja daje realnu sliku te svijeće. Slika je jednako udaljena od leće i jednake veličine kao predmet. Druga leća namještena je iza prve tako, da se obje leće dodiruju. Te dvije leće sada daju sliku svijeće, koja je umanjena u omjeru prema svijeći kao 1 : 4. Kolike su žarišne daljine leća i gdje se nalazi konačna slika svijeće?

Budući da je slika svijeće jednaka samoj svijeći znači, da se svijeća nalazi u dvostrukoj žarišnoj daljini leće, t. j. prva leća ima žarišnu daljinu

$$f_1 = 10\ cm.$$

Kad stavimo još jednu leću žarišne daljine f_2 uz našu prvu leću, onda za žarišnu daljinu obiju leća f_3 vrijedi relacija

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Te dvije leće daju realnu sliku svijeće

4 puta manju, t. j. slika se sada mora nalaziti 4 puta bliže leći. Slika je dakle udaljena

$$20 : 4 = 5\ cm$$

od obiju leća. Iz osnovne jednadžbe leća:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_3},$$

izlazi:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{f_3}, \quad \text{t. j. } f_3 = 4\ cm.$$

Odnosno:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{f_2}, \quad \text{t. j. } f_2 = \underline{6{,}67\ cm.}$$

Riješili zadatke iz fizike iz 1. broja

Bajtarević Ahmed, 4. r. g. Visoko 161 (djel.), 162 (djel.), 163, 164, 164; *Bodlović Petar*, 4a r. 1. g. Zagreb 161 (djel.), 162, 163, 164 (djel.), 165; *Bojnec Jernej*, 4 r. g. Murska Sobota, 162, 163 (djel.), 164 (djel.), 165; *Dvizac Menail*, 3 r. STŠ, Mostar, 164 (djel.); *Gros Mladen*, 4a r. 1. g. Ljubljana, 161, 162, 163, 164, 165; *Hendeković Josip*, 4b r. 2. g. Zagreb, 161 (djel.), 162, 163 (djel.), 164, 165; *Loutar Franc*, 2. r. g. Kočevje, 164; *Lesjak Janez*, 3. r. g. Kočevje, 161, 162, 163, 164, 165; *Suljagić Salih*, 3. r. 5. g. Zagreb, 161, 162, 163, 164; *Јеремић Ђурђе*, 3_3 p. r. »Св. Марковић«, Ниш, 161 (дел.) 162; *Летић Милан*, 4e p. r. »М. Пијаде«, Суботица, 161, 162, 164; *Радовановић Нинослав*, 4_1 p. r. »Ст. Сремац», Ниш, 161 (дел.), 163 (дел.), 164; *Ставрић Ратко*, 4a p. r. Охрид, 161, 164 (дел.).

Vježbe za učenike gimnazija i srednjih stručnih škola

Prvi elementi infinitezimalnog računa

4. Sukcesivne derivacije

I derivacija funkcije $y = f(x)$ također je funkcija od x, te i od nje možemo načiniti derivaciju. Ta se derivacija zove *druga* derivacija od $f(x)$ i označuje se s $f''(x)$. Tako je

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Ako je $y = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 5$, to je $y' = 12x^2 + 6x + 2$, $y'' = 24x + 6$; slično je $y'''(x) = 24$ i $y^{IV}(x) = 0$.

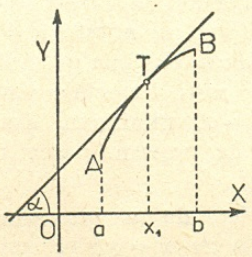
5. Porast i pad funkcija

Uzmimo neku funkciju $y = f(x)$ neprekidnu u intervalu (a, b). Kažemo, da ta funkcija raste u tom intervalu, kad se ona mijenja u istom smislu kao i varijabla, t. j. kad x raste tad y raste, kad se x umanjuje, tad se i y umanjuje.

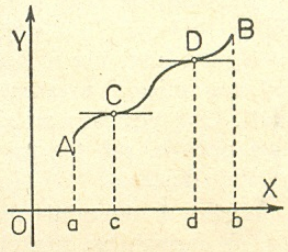
Istaknimo u intervalu (a, b) kakovegod 2 vrijednosti x_1 i x_2 varijable x, kojima pripadaju vrijednosti y_1 i y_2 zadane funkcije. Kazati da se x i y mijenjaju u istom smislu znači, da je uz $x_2 > x_1$ i $y_2 > y_1$ ili uz $x_2 - x_1 > 0$ također $y_2 - y_1 > 0$ ili također da je $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$. Ili, ako s Δx označimo prirast varijable počevši od x_1, a s Δy pripadni prirast od y_1, gdje $x_1 + \Delta x$ pripada intervalu (a, b), to naš kriterij za porast funkcije postaje $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Uzmimo sad, da $\Delta x \to 0$, a funkcija $f(x)$ da je derivabilna, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ostaje pozitivno, jer granica konstantno pozitivne veličine ne može biti negativna, to je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \text{ pozitivno.}$$

Izuzetno može derivacija u nekim izuzetnim točkama intervala biti jednaka nuli.



Sl. 1.



Sl. 2.

Možemo dakle izreći ovaj poučak: *Ako derivabilna funkcija $f(x)$ raste u intervalu (a, b), njezina je derivacija pozitivna za sve vrijednosti intervala izuzevši možda za nekoje od njih, za koje je ona jednaka nuli.*

Funkcija, koja konstantno raste u intervalu (a, b), predočena je na sl. 1; u svakoj točki krivulje AB jest kut α, što ga tangenta u toj točki čini s poz. smjerom osi x, $< 90°$, pa je $tg\,\alpha = y' > 0$.

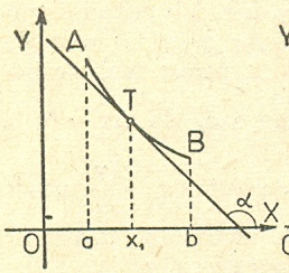
Sl. 2. nam predočuje funkciju, koja također raste u intervalu (a, b) izuzevši u točkama za $x = c$ i $x = d$; te se točke zovu *točke infleksije* krivulje. U tim je točkama $y' = 0$.

Ako funkcija pada u intervalu (a, b) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je negativno i analognim zaključivanjem kao gore nalazimo, da je $f'(x_1)$ negativno za sve vrijednosti od x tog intervala izuzevši možda

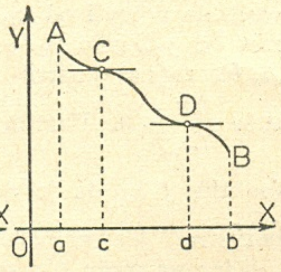
za nekoje od njih, za koje je derivacija jednaka nuli (vidi sl. 3. i 4.).

Ako je funkcija konstantna u cijelom intervalu (a, b), Δy je konstantno jednako nuli u cijelom intervalu, pa je jednako nuli i $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i također i derivacija.

Primjer. Kad funkcija $y = x^2 - 4x + 5$ raste, a kad ona pada? Kako je $y' = 2x - 4$



Sl. 3.



Sl. 4.

i $2x - 4 > 0$ za $x > 2$, $2x - 4 < 0$ za $x < 2$, vidimo, da x raste za svako $x > 2$ i pada za svako $x < 2$.

6. Maksimum i minimum funkcija

Kažemo, da neka u intervalu (a, b) derivabilna funkcija $f(x)$ poprima na mjestu $x = x_0$ tog intervala *maksimum*, ako ona počevši od tog mjesta prestane rasti i počinje padati. Ona poprima za $x = x_0$ minimum, ako ona počevši od tog mjesta prestane padati i počinje rasti.

Nužni i dovoljni uvjet, da u intervalu (a, b) derivabilna funkcija za $x = x_0$ prolazi maksimumom jest, da se njezina derivacija za $x = x_0$ poništava prelazeći od pozitivnih vrijednosti preko nule na negativne vrijednosti, kad x prelazi vrijednost x_0 rastući.

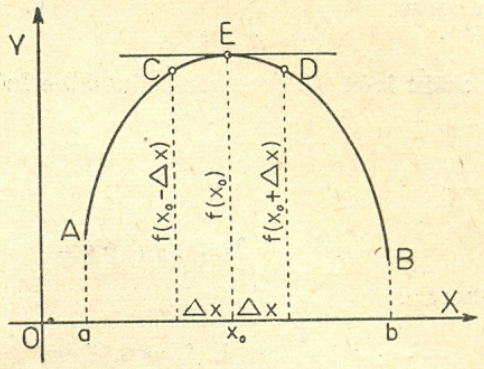
Ako $f(x)$ poprima za $x = x_0$ maksimum, imamo po definiciji

$$f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) > f(x_0 + \Delta x).$$

Funkcija dakle neprestano raste, kad x raste od $x_0 - \Delta x$ do x_0, pa je njezina derivacija pozitivna u tom intervalu. Kad funkcija y zatim pada, kad x ide od x_0 do $x_0 + \Delta x$, derivacija je negativna u tom drugom intervalu.

Kako je derivacija neprekidna za $x = x_0$ ona ne može prijeći od pozitivnih vrijednosti na negativne, a da se ne poništi.

Uvjet je dovoljan: ako je derivacija pozitivna, kad x raste od $x_0 - \Delta x$ do x_0, funkcija raste u tom prvom intervalu; derivacija je zatim negativna, kad x raste od x_0 do $x_0 + \Delta x$, funkcija pada u tom drugom intervalu. Za $x = x_0$ funkcija prestane rasti i počinje padati, ona prolazi dakle maksimumom (sl. 5.).

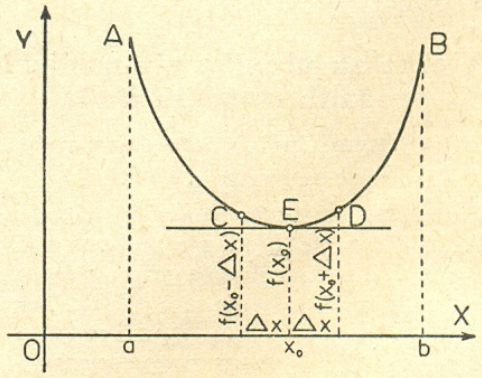


Sl. 5.

Slično se dokazuje, da funkcija $f(x)$ poprima za $x = x_0$ *minimum* ako se njezina derivacija poništava za $x = x_0$ prelazeći od negativnih vrijednosti na pozitivne.

Maksimum i minimum funkcije zovu se *ekstremne* vrijednosti funkcija.

Primjer. Neka se odrede ekstremne vrijednosti funkcije $y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x + 2$. Načinimo y' i stavimo $y' = 0$; imamo $3x^2 - 15x + 12 = 0$ i odatle $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Ispitajmo sad $f'(1 - \Delta x)$ i $f'(1 + \Delta x)$, kako je $f'(x) = 3(x-1)(x-4)$, to je $f'(1-\Delta x) = -3\Delta x(-\Delta x - 3) = 3\Delta x(\Delta x + 3)$ t. j. > 0 i $f'(1 + \Delta x) = 3\Delta x(\Delta x - 3)$ t. j. < 0, to derivacija za $x = 1$ prelazi od pozitivnih vrijednosti na negativne, pa za $x = 1$ funkcija poprima maksimum $1 - \frac{15}{2} + 12 + 2 = \frac{15}{2}$



Sl. 6.

Za $x = 4$ imamo $f'(4 - \Delta x) = -3\Delta x(3 - \Delta x)$ t. j. < 0, $f'(4 + \Delta x) = 3\Delta x(3 + \Delta x)$ t. j. > 0 pa za $x = 4$ funkcija poprima minimum

$$4^3 - \frac{15}{2} \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 2 = 64 - 120 + 48 + 2 = -6.$$

Treba naročito naglasiti, ako je na mjestu $x = x_0$ imamo $f'(x_0) = 0$, da odatle *nipošto* ne smijemo zaključiti, da funkcija $f(x)$ poprima maksimum ili minimum. Treba povrh toga da derivacija $f'(x)$ za $x = x_0$ mijenja predznak t. j. da prelazi od negativnih vrijednosti preko nule na pozitivne ili obrnuto.

Ima još jedan način, na koji se može raspoznati, da li funkcija na mjesto $x = x_0$, gdje je $f'(x_0) = 0$ poprima ili maksimum ili minimum.

Za derivaciju funkcije u okolišu maksimuma vrijede ove nejednakosti: $f'(x_0 - \Delta x) > 0$, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, a u okolišu minimuma $f'(x_0 - \Delta x) < 0$, $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 + \Delta x) > 0$).

Odatle izlazi, da derivacija funkcije u okolišu maksimuma pada (jer prelazi od pozitivnih vrijednosti preko nule na negativne vrijednosti), a u okolišu minimuma raste (jer prelazi od negativnih vrijednosti preko nule na pozitivne vrijednosti).

Zato pak mora derivacija derivacije funkcije t. j. druga derivacija funkcije za $x = x_0$, gdje funkcija poprima maksimum, biti negativna, a za vrijednosti $x = x_0$, gdje funkcija poprima minimum, biti pozitivna. Izlazi dakle ovo:

Ako je za vrijednosti od x, koje se dobivaju iz jednadžbe $f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$, *za te je vrijednosti* $f(x)$ *maksimum, a ako je* $f''(x) > 0$, *za te je vrijednosti* $f(x)$ *minimum.*

U predašnjem primjeru bilo je $f'(x) = 3x^2 - 15x + 12$, pa je $f''(x) = 6x - 15$, $f'(x) = 0$, za $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $f''(1) = 6 - 15 = -9$ t. j. < 0, pa funkcija poprima za $x = 1$ maksimum, $f''(4) = 24 - 15 = 9$ t. j. > 0, pa funkcija poprima za $x = 4$ minimum.

Primjeri 1. Između svih pravokutnika zadana opsega $2s$ izračunaj onaj, komu je površina što veća.

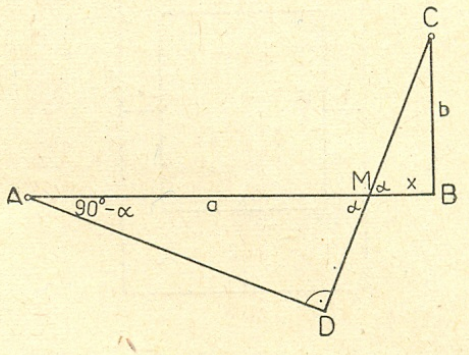
Ako su stranice pravokutnika x i u, to je $2x + 2u = 2s$, $x + u = s$, $u = s - x$, zato je površina $y = x(s - x) = -x^2 + sx$, $y' = -2x + s$, $y' = 0$ za $\frac{s}{2}$, $y'' = -2$ t. j. < 0, pa se radi o maksimumu i $M = \frac{s^2}{4}$.

2. U udaljenosti $BC = b$ od ravne ceste $AB = a$ leži na manje prohodnom terenu zgrada C. Na kojem mjestu M mora netko, koji se uzduž AB vozi kolima konstantnom brzinom v_1, izaći iz kola i ići pješice brzinom $v_2 < v_1$ da do zgrade C dođe što brže?

Ako MB označimo s x, to je vrijeme, za koje se dođe iz A u C jednako

$$t = \frac{a - x}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v_2},$$

$$t' = -\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2 + x^2}},$$



Sl. 7.

$$t' = 0 \text{ za } x = \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}};$$

mora biti $v_1 > v_2$;

$$t'' = \frac{b^2}{v_2(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ t. j. } > 0,$$

pa se radi o minimumu; kako je

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{v_2}{v_1},$$

to se točka M može grafički odrediti, da se na drugu stranu od AB nanese kut od $90^0 - \alpha$ i iz C povuče okomica na drugi krak tog kuta. Zašto?

3. List papira treba da sadrži 18 cm^2 sloga. Gornji i donji rub treba da ima svaki 2 cm, a rubovi sa strane 1 cm. Koje su dimenzije lista, da se uzmogne upotrebiti što manje papira?

Ako je širina sloga x, visina je $\frac{18}{x}$, pa je površina cijelog lista (sl. 8)

$$(x + 2)\left(\frac{18}{x} + 4\right) = 26 + 4x + \frac{36}{x} = y,$$

$y' = 0$ za $x = 3$, onda je $\frac{18}{x} = 6$, pa su dimenzije lista 5 i 10. Kako je $y'' > 0$, vidi se, da se radi o minimumu.

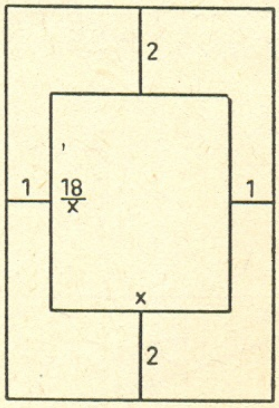
4. Valjkovitu zatvorenu posudu treba tako formirati, da kraj zadanog obujma ima što manju površinu. U kojem su omjeru visina i polumjer osnovke?

Ako je x polumjer osnovke, a y visina valjka, to je

$$V = x^2\pi y \quad \text{ili} \quad y = \frac{V}{x^2\pi}.$$

Kako je

$$O = 2\pi xy + 2x^2\pi = \frac{2O}{x} + 2x^2\pi,$$



Sl. 8.

$$O' = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x, \quad x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

$$y = V : \sqrt[3]{\frac{V^2\pi}{4}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2x, \quad O'' > 0.$$

Izlazi dakle da $y : x = 2 : 1$.

7. Zadaci

1. Odredi maksimum i minimum ovih funkcija:

a) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 9$, ($y' = 0$ za $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; za x_1, $M = 19$, za x_2, $m = -45$).

b) $y = 4x^4 - 25x^2 + 36$, [$y' = 0$ za $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm \frac{5\sqrt{2}}{4}$; za x_1, $M = 36$, za $x_{2,3}$, $m = -\frac{49}{16}$].

c) $y = \frac{x^2 - 6x - 1}{x^2 + 2x + 3}$, [$y' = 0$ za $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; za x_1, $M = 5$; za x_2, $m = -1$].

d) $y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}$, [$y' = 0$, za $x_1 = 0$ $x_2 = 1{,}5$, za x_2, $M = -16$, za x_1, $m = 1$].

e) $y = \cos 2x - 2\cos x$ [$y' = 0$ za $x = k\pi$, $M = -1$, za $x = (2k + 1)\pi$, $M = 3$, za $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $m = -\frac{3}{2}$].

f) $y = \sin x \sin(\frac{\pi}{3} - x)$ [$y' = 0$ za $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $M = \frac{1}{4}$, za $x = \frac{2\pi}{6} + k\pi$, $m = -\frac{3}{4}$].

2. U zadani krug opiši pravokutnik što većeg opsega.

Ako je polumjer kruga r, baza pravokutnika x, njegova je visina $\sqrt{4r^2 - x^2}$; zato je opseg $o = 2x + 2\sqrt{4r^2 - x^2}$,

$$o' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}, \quad o' = 0 \text{ za } x = r\sqrt{2},$$

$$M = 4r\sqrt{2}.$$

3. U kuglu polumjera r neka se upiše valjak što većeg obujma.

Ako je x visina valjka, ρ polumjer osnovke valjka, to je $\rho^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$, obujam valjka $V = \rho^2\pi x = \left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right)x$; iz $V' = 0$ izlazi $x = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$, V je maksimum za tu vrijednost, jer je $V''\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = -r\sqrt{3}\pi$ t. j. < 0,

$$V_{maks.} = \frac{4}{3}r^3\pi\sqrt{3}.$$

4. Između svih istokračnih trokuta upisanih u krug polumjera r neka se odredi onaj, koji ima najveću površinu.

Ako je x kut na vrhu, kutovi na bazi jesu $90^0 - \frac{x}{2}$, baza $a = 2r\sin x$, visina $v = 2r\cos^2\frac{x}{2}$. Zato je $P = 2r^2 \sin x \cos^2\frac{x}{2} = 4r^2 \sin x \cos^3\frac{x}{2}$.

Iz $P' = 0$ izlazi

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \quad x = 60^0, \quad M = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Prof. dr. Radovan Vernić

20. X. ove godine umro je u Zagrebu nakon duge i teške bolesti u 44. godini života dr. Radovan Vernić, profesor astronomije Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Njegov je naučni rad bio usmjeren na problem više tijela, jednog od najvažnijih problema dinamičke astronomije. Isticao se svojim velikim i širokim znanjem. Iako bolestan, uvijek je živo sudjelovao i u društvenom radu. Bio je jedan od najaktivnijih članova Društva matematičara i fizičara i s velikim je interesom pratio rad našeg Matematičko-fizičkog lista.

Smrću Radovana Vernića gubi naša nauka velikog učenjaka, a mi svi dobrog i i iskrenog druga.

Slava mu!

Uredništvo

Математичка укрштеница

ЂУРЂЕ ЈЕРЕМИЋ, Ниш

У свако квадратно поље не долази по једно слово, већ по једна арапска цифра! Децималне запете не треба уносити.

Водоравно:

2. *log* 31
6. Запремина правилне четворостране пирамиде, ако је основка ивица 48, а бочна ивица 34.
8. Антилогаритам броја 1,78533
9. Прве три цифре броја $\sqrt{2}$
10. Решење система $7x - 15y = 3$, $9x - 20y = -4$, најпре вредност за x, па за y
12. Највећи троцифрени прим број
14. Број страна y многоуглу, коме је сума унутрашњих углова 2160°
15. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 98$, $f(-3) = \ ?$
17. 2844,64 : π (заокружену на јединицу)
19. Најмањи заједнички садржалац бројева 9, 99 и 909
21. Решење једначине

$$-0{,}5\left(\frac{x+2}{3} - \frac{x}{2}\right) = 37$$

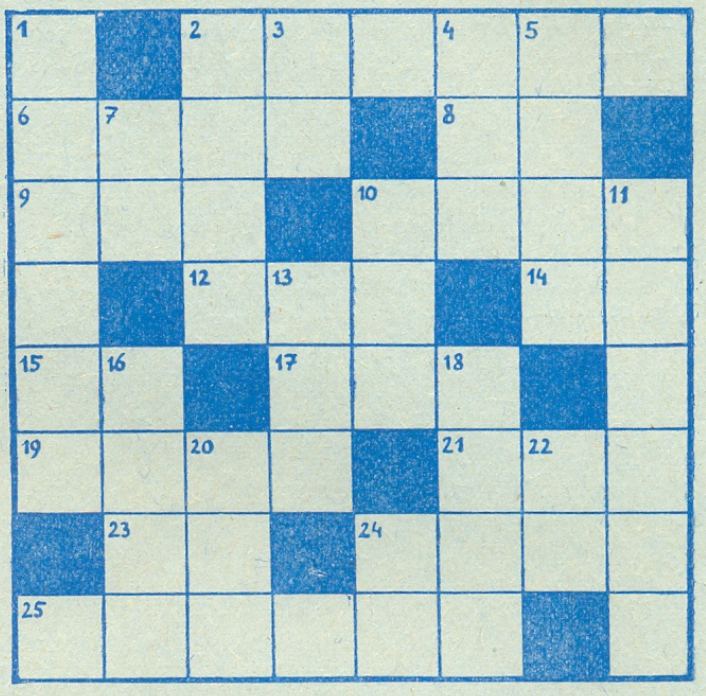
23. Двоцифрен број коме је збир цифара 17, а прва цифра је за 1 мања од друге
24. $\sqrt{41\,409\,225}$
25. Површина коцке са ивицом 325

Усправно:

1. $\sqrt{44\,740\,287\,361}$
2. Четвороцифрени број чије су прве две цифре x, а друге две y из система $x + y = 32$, $x - y = -6$
3. Позитивно решење једначине $10x^2 - 425x - 1610 = 0$
4. 240,24 : $\sqrt[3]{\pi}$
5. Полупречник кугле којој је волумен 126,12
7. Двоцифрен број чија је прва цифра x, а друга y из система

$$\frac{4}{1-2x+3y} + \frac{3}{1-3x+2y} = \frac{5}{6},$$
$$\frac{2}{1-2x+3y} - \frac{5}{1-3x+2y} = \frac{1}{6}$$

10. Полупречници двају концентричних кругова су 8 и 4. Површина кружног прстена једнака је одређеном исечку већега круга. Колики је припадни средишњи угао?
11. $(10^6 - 1) : 7$
13. Највећи троцифрени број
16. Површина равнокраког трапеза, коме су базе 927 и 847, крак 41



18. Број дијагонала у 115-углу
20. Највећи заједнички чинилац бројева 6951 и 10923
22. Друга и трећа цифра *log e*
24. Велика дијагонала квадра ако је $a = 15$, $b = 36$, $c = 52$.

Решење послати до 15. II. 1959. На куверти назначити: „Математичка укрштеница". Између ученика који правилно реше укрштеницу, ждребом ће се одредити њих 10 и наградити математичким књигама. Решење укрштенице објавит ће се у наредном броју.

Укрштеница се не мора изрезивати; довољно је решење на посебном папиру, читљиво потписаном.

Решење укрштенице из бр. 1 и награђени решаваоци

Водоравно:

1 — 111
3 — 126
5 — 20
7 — 84
8 — 248
9 — 652
10 — 1463
12 — 936
14 — 225
16 — 3,718
18 — 153
20 — 121
22 — 27
23 — 24
24 — 817
25 — 253

Усправно:

1 — 1,81712
2 — 144
3 — 14
4 — 289
5 — 25
6 — 0,23873
8 — 232
9 — 667
11 — 6,23
13 — 331
15 — $(^5/_{11})$ 511
17 — 125
19 — 5,4
21 — 27

Од 96 стиглих решења 68 је правилних. Књигом Polya »Kako ću riješiti matematički zadatak« награђени су:

1. Бајтаревић Ахмед, 4 р. г. Високо
2. Бакетић Јерко, 4б р. г. Имотски
3. Чишек Болка, 4ц р. г. Цеље
4. Гњатовић Миле, 4_2 р. г. Сомбор
5. Калајџић Милисав, 3_2 р. г. Чачак.

Књигом Smolec »Matematika i stvarnost« награђени су:

6. Лојен Мирослав, 4а р. г. Вараждин
7. Миловановић Ранко, 3_3 разред гимн. Алексинац
8. Перовић Глигорије, $гео_3$ р. С. т. ш. Титоград
9. Пиперкова Александра, 4_5 клас. гимн. »Ј. Б. Тито« Скопје
10. Поточник Марија, 4б раз. г. Равне на Корошкем.

Накнадно стигла решења

а) Из математике: *Вујовић Милош*, 4_3 р. г. »Ст. Церовић«, Никшић, 321, 324, 326, 328, 333, 334; *Павићевић Вера*, 4_3 разред гимн. »Ст. Церовић, Никшић«, 332, 334; *Петровић Гроздан*, 2_3 раз. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 324, 325, 332, 334; *Ристић Душанка*, 3_1 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 325, 326, 333, 334; *Lojen Miroslav*, 4. a raz. gimn. Varaždin, 321, 326, 328, 329, 330a, b, 331, 332, 333.

б) Из физике: *Lojen Miroslav*, 4. a razred gimn. Varaždin, 161, 162, 163, 164, 165,

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo »Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.

Svim suradnicima!

Svi rukopisi (osim učeničkih rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru. Rukopisi se ne vraćaju.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, školu i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći nikako pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.